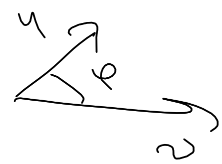
6.1 Indreprodukt, lengde og ortogonalitet

Ta $u, v \in \mathbb{R}^2$. Indreproduktet av u og v er

$$u \cdot v = \text{lengde}(u)\,\text{lengde}(v)\cos\varphi$$



Hva er den strenge definisjonen?

Definisjonen ved bruk av koordinater?

<u>Def</u> For $u, v \in \mathbb{R}^n$, <u>indreproduktet</u> av u og v (<u>prikkproduktet</u>) er

$$u \cdot v = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n$$

Merk $u \cdot v = u^T v = (u_1 \ldots u_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

<u>Normen</u> (eller <u>lengden</u>) til u er

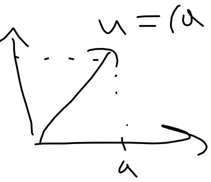
$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{u_1^2 + \ldots + u_n^2}$$

<u>Distansen</u> mellom $u, v \in \mathbb{R}^n$ er

$$d(u,v) = \|u - v\|$$

Så $\|u\| = d(0, u)$.

<u>Eks.</u> $\mathbb{R}^2$



$$\|u\| = d(0,u) = \sqrt{a^2 + b^2}$$

<u>Teorem</u> (hovedegenskaper av prikkproduktet)

For $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ og $c \in \mathbb{R}$, har vi

a) $u \cdot v = v \cdot u$;

b) $(u+v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$,
$u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$;

c) $(cu) \cdot v = c(u \cdot v)$, $u \cdot (cv) = c(u \cdot v)$;

d) $u \cdot u \geq 0$, og $u \cdot u = 0$ hvis og bare hvis $u = 0$.

Senere: $|u \cdot v| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ (Cauchy-Schwarz ulikheten)

Mer generelt enn b) og c):

$(c_1u_1+\dots+c_ku_k)\cdot v = c_1\, u_1\cdot v+\dots+c_k\, u_k\cdot v$,

$v\cdot(c_1u_1+\dots+c_ku_k) = c_1\, v\cdot u_1+\dots+c_k\, v\cdot u_k$

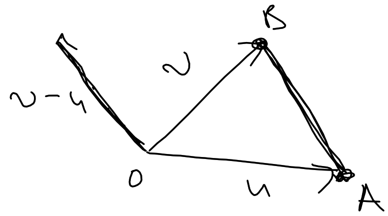
for alle $u_1,\dots,u_k,v\in\mathbb{R}^n$ og $c_1,\dots,c_k\in\mathbb{R}$.

<u>Hovedegenskaper av normen:</u> (husk: $\|u\|=\sqrt{u\cdot u}$)

a) $\|cu\| = |c|\,\|u\|$;

b) $\|u\|\geq 0$, og $\|u\|=0$ hvis og bare hvis $u=0$.

Senere: $\|u+v\|\leq\|u\|+\|v\|$ (<u>Trekantulikheten</u>)



$d(A,B)\leq d(0,B)+d(0,A)$

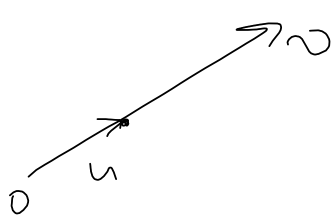
$\|v-u\|\leq\|v\|+\|u\|$

<u>Def</u> Vi sier at $v\in\mathbb{R}^n$ er en <u>enhetsvektor</u> hvis $\|v\|=1$.

Hvis $v\in\mathbb{R}^n$, $v\neq 0$, vi kan <u>normalisere</u> v for å få en enhetsvektor u som "peker i samme retning som v":

$$u=\frac{1}{\|v\|}v$$

$$\left(\|u\|=\left\|\frac{1}{\|v\|}v\right\|=\frac{1}{\|v\|}\cdot\|v\|=1.\right)$$



(hvis $\|v\|>1$)

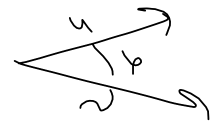
<u>Eks.</u>

$v=(1,1,0,3)\in\mathbb{R}^4$ $\quad\|v\|=\sqrt{1^2+1^2+3^2}=\sqrt{11}$

<u>Da</u> $u=\frac{1}{\|v\|}v=\left(\frac{1}{\sqrt{11}},\frac{1}{\sqrt{11}},0,\frac{3}{\sqrt{11}}\right)$.

<u>Def</u>

Vi sier at $u, v \in \mathbb{R}^n$ er <u>ortogonale</u> hvis
$$u \cdot v = 0.$$

(Husk: $u \cdot v = \text{lengde}(u)\,\text{lengde}(v) \cos\varphi$,  $0 \le \varphi \le \pi$,
så $u \cdot v = 0$ hvis og bare hvis $\varphi = \frac{\pi}{2}$.)

<u>Def</u> La W være en delmengde av $\mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$.
Da sier vi at <u>v er ortogonal på W</u> hvis
$$v \cdot u = 0 \text{ for alle } u \in W.$$

Da skrives vi $v \perp W$. Definer
$$W^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n : v \perp W\}$$
$$= \{v \in \mathbb{R}^n : v \cdot u = 0 \text{ for alle } u \in W\}.$$

Vi kaller $W^\perp$ <u>det ortogonale komplementet</u> til W.

<u>Hovedegenskaper av ortogonale komplementer:</u>

a) $W^\perp \subset \mathbb{R}^n$ er et underrom;

b) Hvis $v \in W \cap W^\perp$, da $v = 0$;

c) hvis $W \subset \mathbb{R}^n$ er et underrom og $W = \text{span}\{w_1, \dots, w_k\}$, da
$$W^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n : v \perp w_i \text{ for } i = 1, \dots, k\}$$
$$= \{v \in \mathbb{R}^n : v \cdot w_1 = \dots = v \cdot w_k = 0\}$$

<u>Bevis</u>

a) $0 \in W^\perp$, fordi $0 \cdot u = 0$ for alle $u \in \mathbb{R}^n$.

Hvis $u, v \in W^\perp$ og $w \in W$, da
$$(u+v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w = 0 + 0 = 0, \text{ så } u+v \in W^\perp$$

Hvis $v \in W^\perp$, $c \in \mathbb{R}$, $w \in W$, da

$$(cv)\cdot w = c(v\cdot w) = 0,\ \text{så}\ cv \in W^\perp.$$

b) Hvis $v \in W \cap W^\perp$, da

$$\underset{W}{v}\cdot \underset{W^\perp}{v} = 0,\ \text{så er}\ v = 0.$$

c) Hvis $v \in W^\perp$ og $W = \text{span}\{w_1, \dots, w_k\}$, da

$$v\cdot w_1 = \dots = v\cdot w_k = 0.$$

Anta $v \in \mathbb{R}^n$ er slik at

$$v\cdot w_1 = \dots = v\cdot w_k = 0.$$

Hvis $w \in W$, vi kan skrive

$$w = c_1 w_1 + \dots + c_k w_k \qquad (c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R})$$

Da får vi

$$v\cdot w = v\cdot(c_1 w_1 + \dots + c_k w_k) = c_1(v\cdot w_1) + \dots + c_k(v\cdot w_k) = 0$$

Vi konkluderer at $v \in W^\perp$.

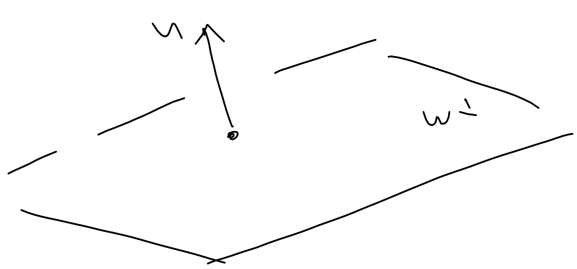
Eks.

$\mathbb{R}^3$, $W = \{n\}$, $n = (a, b, c) \neq 0$.

$$W^\perp = \{v \in \mathbb{R}^3 : v\cdot n = 0\}$$
$$= \{(x,y,z) : ax + by + cz = 0\}$$

= planet gjennom origo med normal vektor n

$W = \{n\}$.



Teorem

La A være en $m \times n$ matrise. Da

$$(\text{Row}\, A)^{\perp} = \text{Nul}\, A \quad \text{og} \quad (\text{Col}\, A)^{\perp} = \text{Nul}\, A^T$$

Bevis

La oss skrive $A^T = [r_1 \ldots r_m]$ $(r_i \in \mathbb{R}^n)$

$\text{Row}\, A = \text{span}\{r_1, \ldots, r_m\}$

Da ~~får~~ vi at

$$(\text{Row}\, A)^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^n : r_i \cdot x = 0 \text{ for } i = 1, \ldots, m\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^n : \begin{pmatrix} r_1 \cdot x \\ \vdots \\ r_m \cdot x \end{pmatrix} = Ax = 0\}$$

$$= \text{Nul}\, A$$

$(\text{Col}\, A)^{\perp} = \text{Nul}\, A^T$ kan vises på samme måte. Eller:

$$(\text{Col}\, A)^{\perp} = (\text{Row}\, A^T)^{\perp} = \text{Nul}\, A^T.$$

Eks

$$W = \text{span}\{\underset{a_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}}, \underset{a_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}}\} \subset \mathbb{R}^4$$

Da er $W = \text{Col}\, A$ for $A = [a_1\ a_2]$.

Da konkluderer vi at

$$W^{\perp} = (\text{Col}\, A)^{\perp} = \text{Nul}\, A^T = \text{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \{\begin{pmatrix} 2s - 3t \\ -s - 4t \\ s \\ t \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R}\}$$

$$= \text{span}\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

Lin. uavhengige

Vi ser at $W^\perp$ har basis

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$