6.7 Indreproduktrom

Vi definerte prikkproduktet på $\mathbb{R}^n$:

$$u \cdot v = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n$$

(husk: $\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$.)

Hva skjer hvis vi velger en annen basis?
Begrenser prikkproduktet til et underrom?

Def
Et indreproduktrom, eller et Euklidisk rom, er et vektorrom V med funksjon

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

slik at:

a) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$;

b) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

$(\langle w, u + v \rangle = \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle)$;

c) $\langle cu, v \rangle = c \langle u, v \rangle \quad (c \in \mathbb{R})$;

d) $\langle u, u \rangle \geq 0$, og $\langle u, u \rangle = 0$ hvis og bare hvis $u = 0$.

Vi definerer

normen: $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$,

distansen mellom vektorer: $d(u, v) = \|u - v\|$.

Eks.

1) $V = \mathbb{R}^n$ med prikkproduktet.

2) La oss velge tall $\rho_1 > 0, \dots, \rho_n > 0$.

Definer et nytt indreprodukt på $\mathbb{R}^n$ ved

$$\langle u, v \rangle = \rho_1 u_1 v_1 + \dots + \rho_n u_n v_n.$$

Lett å sjekke at vi får et indreprodukt.

For eks., la oss sjekke d):

$$\langle u, u \rangle = \rho_1 u_1^2 + \dots + \rho_n u_n^2 \geq 0.$$

Hvis $\langle u, u \rangle = 0$, da $\rho_i u_i^2 = 0$ for $i = 1, \dots, n$,

så $u_i = 0$ for alle i.

Hvis $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ er et indreproduktrom, $u, v \in V$, vi sier at u og v er <u>ortogonale</u> og skriver $u \perp v$ hvis $\langle u, v \rangle = 0$.

Eks

Ortogonalitet er avhengig av indreproduktet.

Betrakt $V = \mathbb{R}^2$ med indreproduktet

$$\langle u, v \rangle = 2 u_1 v_1 + 5 u_2 v_2.$$

Ta $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Vi har $\langle u, v \rangle = 2 \cdot 1 \cdot 5 + 5 \cdot 1 \cdot (-2) = 0$, så $u \perp v$ i $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Men $u \cdot v = 1 \cdot 5 + 1 \cdot (-2) = 3 \neq 0$, så er u og v ikke ortogonale i $(\mathbb{R}^2, \cdot)$.

Eks.

1) Ta $V = \mathbb{P}_n$ = rom av polynomer av grad $\leq n$.

Ta $m \geq n$ og velg <u>distinkte</u> reelle tall $t_0, t_1, \dots, t_m$. Definer

$$\langle p, q \rangle = p(t_0)q(t_0) + p(t_1)q(t_1) + \dots + p(t_m)q(t_m).$$

La oss sjekke d):

$$\langle p, p \rangle = p(t_0)^2 + \dots + p(t_m)^2 \geq 0$$

Hvis $\langle p, p \rangle = 0$, da $p(t_0) = \dots = p(t_m) = 0$.
Vi ser at $t_0, \dots, t_m$ er røtter til p, så vi har $m+1 > n$ røtter. Siden grad $p \leq n$, får vi $p = 0$.

2) La $V = C[a, b]$ = rom av kontinuerlige reelle funksjoner på $[a, b]$.

Definer

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) g(t)\, dt.$$

Igjen la oss sjekke d):

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f(t)^2\, dt \geq 0.$$

Hvis $f \neq 0$, da $\int_a^b f(t)^2 dt > 0$.

$f(t_0)^2 > 0$

Betrakt $V = C[0, 2\pi]$, $f(t) = \sin t$, $g(t) = \cos t$.

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} \sin t \cos t\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2t\, dt = -\cos 2t \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

6.2, 6.7

Ortogonale mengder

Vi definerte normen til u:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

Egenskaper:

a) $\|cu\| = |c|\,\|u\| \quad (c \in \mathbb{R})$.

b) $\|u\| \geq 0$, og $\|u\| = 0$ hvis og bare hvis $u = 0$.

(Senere: $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ Trekantulikheten)

Pythagoras teorem

Anta at $(V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ er et indreproduktrom, $u, v \in V$, $u \perp v$. Da

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Bevis

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle$$
$$= \langle u,u \rangle + \langle u,v \rangle + \langle v,u \rangle + \langle v,v \rangle$$
$$= \langle u,u \rangle + \langle v,v \rangle \qquad \boxed{\langle u,v \rangle = \langle v,u \rangle = 0 \text{ fordi } u \perp v}$$
$$= \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

$\boxtimes$

Def

En mengde $S = \{v_i : i \in I\}$ av distinkte vektorer i et indreproduktrom kalles ortogonal hvis

$$v_i \perp v_j \quad \text{for } i \neq j.$$

Vi også sier da at S er et ortogonalt system

Eks.

1) $\mathbb{R}^n$ (med prikkproduktet)

$v_1 = (4, -3, 0, 1)$, $v_2 = (3, 5, 0, 3)$, $v_3 = (0, 0, 2, 0)$

Da er $\{v_1, v_2, v_3\}$ et ortogonalt system. For eks.,

$\langle v_1, v_2 \rangle = 4 \cdot 3 - 3 \cdot 5 + 1 \cdot 3 = 0$.

2) $E = C[0, 2\pi]$, $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t) g(t)\, dt$.

$f_1(t) = 1$, $f_2(t) = \sin t$, $f_3(t) = \cos t$.

Da er $\{f_1, f_2, f_3\}$ ortogonal:

Vi vet at $f_2 \perp f_3$,

$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_0^{2\pi} \sin t\, dt = 0$, $\langle f_1, f_3 \rangle = \int_0^{2\pi} \cos t\, dt = 0$.

<u>Teorem 4</u>

Anta at S er ortogonal og $0 \notin S$. Da er S lineært uavhengig.

<u>Bevis</u>

Anta at $c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n = 0$

for distinkte $v_1, \ldots, v_n$ og noen $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 0 &= \langle c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n, v_i \rangle \\ &= c_1 \langle v_1, v_i \rangle + \ldots + c_n \langle v_n, v_i \rangle \\ &= c_i \langle v_i, v_i \rangle \qquad (\text{fordi } \langle v_j, v_i \rangle = 0 \text{ for } j \neq i) \end{aligned}$$

Siden $\langle v_i, v_i \rangle > 0$, får vi $c_i = 0$.

$\boxtimes$

<u>Def</u>

En <u>ortogonal basis</u> for et indreproduktrom V er et ortogonalt system som er en basis.

Fra Teorem 4 konkluderes vi:

Et ortogonalt system S $(0 \notin S)$ er en ortogonal basis hvis og bare hvis S utspenner V.

Teorem 3

Anta at $\{v_1, \dots, v_n\}$ er en ortogonal basis for et indreproduktrom V. La $y \in V$. Da

$$y = \frac{\langle y, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 + \dots + \frac{\langle y, v_n\rangle}{\langle v_n, v_n\rangle} v_n .$$

Bevis

Vi kan skrive $y = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$ for noen $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

Vi har at

$$\langle y, v_i\rangle = \langle c_1 v_1 + \dots + c_n v_n , v_i\rangle$$
$$= c_1 \langle v_1, v_i\rangle + \dots + c_n \langle v_n, v_i\rangle$$
$$= c_i \langle v_i, v_i\rangle \quad (\text{fordi } \langle v_j, v_i\rangle = 0 \text{ for } j \neq i)$$

Dessom

$$c_i = \frac{\langle y, v_i\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle} .$$

Vi kan skrive:

Hvis $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ er en ortogonal basis for V,

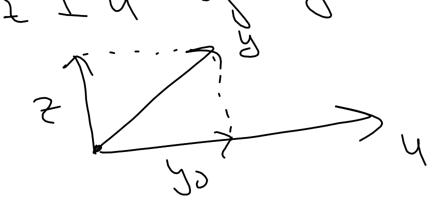
$$\{y\}_S = \left(\frac{\langle y, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}, \dots, \frac{\langle y, v_n\rangle}{\langle v_n, v_n\rangle} \right).$$

La oss prøve å svare på ~~følgende~~ følgende spørsmål:

$u, y \in V$, $u \neq 0$. Kan vi skrive y som

$$y = y_0 + z$$

slik at $z \perp u$ og y_0 er parallell til u (dvs. $y_0 \in \mathbb{R}u$)



Definer $y_0 = \frac{\langle y,u\rangle}{\langle u,u\rangle} u$, $z = y - y_0$.

Vi har

$$\langle z,u\rangle = \langle y - \frac{\langle y,u\rangle}{\langle u,u\rangle} u, u\rangle$$

$$= \langle y,u\rangle - \frac{\langle y,u\rangle}{\langle u,u\rangle} \langle u,u\rangle$$

$$= \langle y,u\rangle - \langle y,u\rangle = 0.$$

Det virker!

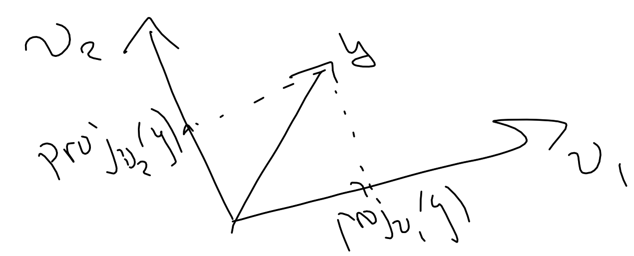
y_0 kalles den ortogonale projeksjonen av y langs, eller på $L = \mathbb{R}u$.

Vi skal skrive $y_0 = \mathrm{proj}_u(y) = \mathrm{proj}_L(y)$.

$$\boxed{\mathrm{proj}_u(y) = \frac{\langle y,u\rangle}{\langle u,u\rangle} u}$$

Hvis $\{v_1, \dots, v_n\}$ er en ortogonal basis for V, da får vi

$$y = \mathrm{proj}_{v_1}(y) + \dots + \mathrm{proj}_{v_n}(y)$$



Eks.

$V = \mathbb{P}_2$, $\langle p,q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$.

La $p(t) = 3t - t^2$, $q(t) = 3 + 2t^2$, $L = \mathbb{R}q$.

$$\mathrm{proj}_q(p) = \mathrm{proj}_L(p) = \frac{\langle p,q\rangle}{\langle q,q\rangle} q = \frac{(3(-1)-(-1)^2)(3+2(-1)^2) + 0 + (3-1)(3+2)}{(3+2)^2 + 3^2 + 5^2} q = -\frac{10}{59} q.$$