6.2. Ortogonale mengder

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ indreproduktrom

$S \subset V$ er en ortogonal mengde, eller et ortogonalt system, hvis

$v \perp w$ for alle distinkte $v, w \in S$.

Hvis S er ortogonal og $0 \notin S$, da er S lineært uavhengig.

Hvis S utspenner V (og $0 \notin S$), da får vi at S er en ortogonal basis.

Anta at $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ er en ortogonal basis for V, da

$$y = \frac{\langle y, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 + \ldots + \frac{\langle y, v_n \rangle}{\langle v_n, v_n \rangle} v_n.$$

Def

En ortogonal mengde S kalles ortonormal (eller vi sier at S er et ortonormalt system) hvis

$$\|v\| = 1 \text{ for alle } v \in S.$$

Hvis S er også en basis, da sier vi at S er et ortonormal basis.

Hvis $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ er en ortonormal basis, da

$$y = \langle y, v_1 \rangle v_1 + \ldots + \langle y, v_n \rangle v_n.$$

Tallene $\langle y, v_i \rangle$ kalles Fourier koeffisientene av y.

Eks.

$\mathbb{R}^n$ (med prikkproduktet)

$e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$

$\{e_1, \dots, e_n\}$ er en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$

Obs: Hvis $\{v_1, \dots, v_n\}$ er en ortogonal mengde og $v_i \neq 0$ for alle i, da er

$$\left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|} \right\}$$

en ortonormal mengde.

Teorem 6

En $m \times n$ matrise $U = [u_1 \dots u_n]$ har ortonormale kolonner (i $\mathbb{R}^m$ med prikkproduktet) hvis og bare hvis

$$U^T U = I_n$$

Bevis

$$U^T U = [u_i^T u_j]_{1 \le i,j \le n} = [u_i \cdot u_j]_{1 \le i,j \le n}$$

Dersom

$$U^T U = I_n \iff u_i \cdot u_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$\iff \{u_1, \dots, u_n\}$ er ortonormal. $\boxtimes$

Eks

$$U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$U^T U = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teorem 7

La U være en $m \times n$ matrise med ortonormale kolonner (så $U^T U = I_n$). Da gjelder:

a) $\|Ux\| = \|x\|$ for alle $x \in \mathbb{R}^n$;

b) $(Ux)\cdot(Uy) = x \cdot y$ for alle $x, y \in \mathbb{R}^n$;

c) $Ux \perp Uy \iff x \perp y$.

Bevis

b)
$$(Ux)\cdot(Uy) = (Ux)^T Uy = x^T U^T U y = x^T y = x \cdot y.$$

a), c) følger fra b). $\square$

Hvis $U^T U = I_n$, U kalles en isometri.

6.3 Ortogonale projeksjoner

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ indreproduktrom

$W \subset V$, $W^\perp = \{v \in V : v \perp w$ for alle $w \in W\}$

Husk: 1) Hvis $v \in W \cap W^\perp$, da får vi at $v = 0$

2) $W^\perp$ er et underrom av V.

Teorem 8

Anta at V er et indreproduktrom, $W \subset V$ et endeligdimensjonalt underrom. For enhver $v \in V$ finnes det en entydig dekomposisjon
$$v = \hat{v} + q$$
slik at $\hat{v} \in W$ og $q \in W^\perp$.

Vektoren $\hat{v}$ kalles <u>den ortogonale projeksjonen</u> av v på W og betegnes som

$$\mathrm{proj}_W(v).$$

Hvis $W = \mathbb{R}w$, vi har visst at

$$\mathrm{proj}_W(v) = \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} w.$$

Mer generelt, hvis $\{w_1, \dots, w_n\}$ er en ortogonal basis for W,

$$\mathrm{proj}_W(v) = \frac{\langle v, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 + \dots + \frac{\langle v, w_n\rangle}{\langle w_n, w_n\rangle} w_n.$$

<u>Bevis</u>

Vi skal vise senere at hvert endeligdimensjonalt indreproduktrom har en ortogonal basis.

Anta at $\{w_1, \dots, w_n\}$ er en ortogonal basis i W. Definer

$$\hat{v} = \frac{\langle v, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 + \dots + \frac{\langle v, w_n\rangle}{\langle w_n, w_n\rangle} w_n,$$

$$q = v - \hat{v}.$$

Vi trenger å sjekke at $q \perp W$.

For enhver $w \in W$, har vi

$\langle q, w\rangle = \langle v - \hat{v}, w\rangle$. Vi trenger å vise at $\langle q, w\rangle = 0$. Det er nok å sjekke dette for $w = w_i$ for alle $i = 1, \dots, n$. Vi har

$$\langle q, w_i\rangle = \langle v - \hat{v}, w_i\rangle = \langle v, w_i\rangle - \langle \hat{v}, w_i\rangle$$

$$= \langle v, w_i\rangle - \frac{\langle v, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle}\langle w_1, w_i\rangle - \dots - \frac{\langle v, w_n\rangle}{\langle w_n, w_n\rangle}\langle w_n, w_i\rangle$$

$$= \langle v, w_i \rangle - \frac{\langle v, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} \langle w_i, w_i \rangle$$

$$= \langle v, w_i \rangle - \langle v, w_i \rangle = 0.$$

Anta at vi har en annen dekomposisjon

$$v = v' + q' \quad , \quad v' \in W, \; q' \in W^\perp.$$

Vi har

$$\hat{v} + q = v' + q',$$

$$\hat{v} - v' = q' - q$$

Dette viser at $\hat{v} - v' = q' - q \in W \cap W^\perp = \{0\}$.

Dessom $\hat{v} = v'$ og $q' = q$. ☒

<u>Konsekvenser</u>:

1) $(W^\perp)^\perp = W$

<u>Bevis</u>

Det er opplagt at $W \subset (W^\perp)^\perp$.

Ta $v \in (W^\perp)^\perp$. Vi kan skrive v som

$$v = \hat{v} + q \quad , \quad \hat{v} \in W, \; q \in W^\perp.$$

Siden $\hat{v} \in (W^\perp)^\perp$, konkluderer vi at

$$q = v - \hat{v} \in (W^\perp)^\perp \cap W^\perp = \{0\}.$$

Vi ser at $q = 0$, så $v = \hat{v} \in W$. ☒

2) Anta at V er endeligdimensjonalt, $W \subset V$ er et underrom. Da

$$\dim W + \dim W^\perp = \dim V$$

Bevis

La $\{w_1, \ldots, w_k\}$ være en basis for W,

$\{v_1, \ldots, v_m\}$ en basis for $W^\perp$.

Vi vil vise at $\{w_1, \ldots, w_k, v_1, \ldots, v_m\}$ er en basis for V.

(Da får vi hva vi trenger:

$\dim V = k+m = \dim W + \dim W^\perp$.)

Hvis $v \in V$, vi kan skrive

$$v = \hat{v} + q \quad , \hat{v} \in W, \; q \in W^\perp$$

Siden $\hat{v} \in \mathrm{span}\{w_1, \ldots, w_k\}$, $q \in \mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_m\}$, ser vi at $v \in \mathrm{span}\{w_1, \ldots, w_k, v_1, \ldots, v_m\}$.

Vi trenger å vise at $w_1, \ldots, w_k, v_1, \ldots, v_m$ er lineært uavhengige. Anta

$$\underbrace{c_1 w_1 + \ldots + c_k w_k}_{\hat{w}} + \underbrace{d_1 v_1 + \ldots + d_m v_m}_{\hat{w}^\perp} = 0.$$

Det følger at

$$c_1 w_1 + \ldots + c_k w_k = 0 \quad \text{og} \quad d_1 v_1 + \ldots + d_m v_m = 0.$$

Dersom $c_1 = \ldots = c_k = 0$ og $d_1 = \ldots = d_m = 0$. ☒

Hvis $\{w_1, \ldots, w_n\}$ er en ortonormal basis for $W \subset V$,

$$\mathrm{proj}_W(v) = \langle v, w_1 \rangle w_1 + \ldots + \langle v, w_n \rangle w_n$$

La oss reformulere dette for $\mathbb{R}^n$:

Teorem 10

La $W \subset \mathbb{R}^n$ være et underrom.
Anta at $\{u_1, \dots, u_m\}$ er en ortonormal basis for W.
Betrakt matrisen

$$U = [u_1 \dots u_m].$$

Da $\text{proj}_W(v) = UU^T v$ for alle $v \in \mathbb{R}^n$.

$$\boxed{\text{proj}_W = UU^T}$$

Bevis

$$\text{proj}_W(v) = (v \cdot u_1)u_1 + \dots + (v \cdot u_m)u_m$$

$$= U \begin{pmatrix} v \cdot u_1 \\ \vdots \\ v \cdot u_m \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} u_1^T v \\ \vdots \\ u_m^T v \end{pmatrix} = UU^T v.$$

∎

Merk:

Betrakt $P = UU^T = \text{proj}_W$.

1) $P^T = (UU^T)^T = (U^T)^T U^T = UU^T = P$.

2) $P^2 = UU^TUU^T = UU^T = P$.

fordi $U^T U = I_m$ (Teorem 6)