6.4. QR-faktorisering

V et indreproduktrom
$W \subset V$ et underrom med basis $\{u_1, \ldots, u_p\}$.
Definerer vi

$$v_1 = u_1,$$
$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}$$
$$\ldots \quad \ldots$$
$$v_k = u_k - \frac{\langle u_k, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 - \ldots - \frac{\langle u_k, v_{k-1}\rangle}{\langle u_k, v_{k-1}\rangle} v_{k-1}$$
$$\ldots$$

Da er $\{v_1, \ldots, v_k\}$ er en ortogonal basis for $W_k = \text{span}\{u_1, \ldots, u_k\}$ for $k = 1, \ldots, p$.
Vi kan normalisere $v_k' = \frac{v_k}{\|v_k\|}$, da er $\{v_1', \ldots, v_k'\}$ er en ortonormal basis for W_k.

<u>Teorem 12</u> (QR-faktorisering)
Anta at A er $m \times n$ matrise med lineært uavhengige kolonner (så $m \geq n$). Da

$$A = QR$$

for entydig bestemt matriser Q og R, hvor Q er en $m \times n$ matrise med kolonner som danner en ortonormal basis for $\text{Col}(A)$ og R er en $n \times n$ øvre triangulær matrise med strengt positive elementer langs diagonalen.

Bevis

$A = [u_1, \dots, u_n]$, $u_i \in \mathbb{R}^m$.

Da er $\{u_1, \dots, u_n\}$ en basis for

$$W = \text{span}\{u_1, \dots, u_n\} \subset V = \mathbb{R}^m.$$

Vi bruker Gram-Schmidt prosessen og normalisering for å få en ortonormal basis for $W = \text{Col}(A)$. Vi har at

$$v_k = b_{kk} u_k + b_{1k} u_1 + \dots + b_{1,k-1} u_{k-1}$$

for reelle tall b_{ij}, $b_{kk} > 0$.

Da følger det at

$$u_k = r_{kk} v_k + r_{1k} v_1 + \dots + r_{k-1,k} v_{k-1} \quad (*)$$

for reelle tall r_{ij}, $r_{kk} = \frac{1}{b_{kk}} > 0$, $r_{ij} = 0$ for $i < j$.

Definer

$$Q = [v_1, \dots, v_n], \quad R = (r_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ & r_{22} & \cdots & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & r_{nn} \end{pmatrix}$$

$(*)$ kan skrives som

$$[u_1, \dots, u_k] = [v_1, \dots, v_k] R,$$

dvs $\quad A = QR.$

Vi vil vise at Q og R er entydig bestemt.

Anta $A = QR$, $Q = [v_1, \dots, v_n]$,

$\{v_1, \dots, v_n\}$ er en ortonormal basis for $\text{Col}(A)$,

R er øvre triangulær, $r_{kk} > 0$ for alle k.

Faktorisering $A=QR$ betyr at

$$[u_1,\dots,u_n]=[v_1,\dots,v_n]R,$$

$$u_k = r_{kk}v_k + r_{1k}v_1 + \dots + r_{k-1,k}v_{k-1}$$

Da kan vi skrive

$$v_k = b_{kk}u_k + b_{1k}u_1 + \dots + b_{k-1,k}u_{k-1},$$

hvor $b_{kk} = \frac{1}{r_{kk}} > 0$.

Vi kan konkludere at

$$W_k = \operatorname{span}\{u_1,\dots,u_k\} = \operatorname{span}\{v_1,\dots,v_k\}.$$

Det følger at $v_k \in W_k \cap W_{k-1}^{\perp}$.

Merk at $\dim(W_k \cap W_{k-1}^{\perp}) = \dim W_k - \dim W_{k-1} = k-(k-1)=1$.

Det følger at $W_k \cap W_{k-1}^{\perp}$ har bare to enhetsvektorer, v_k og $-v_k$.

Vi har at $\langle u_k, v_k\rangle = \langle r_{kk}v_k, v_k\rangle = r_{kk} > 0$.

Vi konkluderer at v_k er den eneste enhetsvektoren i $W_k \cap W_{k-1}^{\perp}$ slik at $\langle u_k, v_k\rangle > 0$.

Vi ser at $v_1,\dots,v_n$ er entydig bestemt, dvs. Q er entydig bestemt. Da er

$$R = (Q^TQ)R = Q^TQR = Q^TA$$

fordi Q har ortonormale kolonner

også entydig bestemt ∎

Husk En $m\times n$ matrise Q har ortonormale kolonner hvis og bare hvis

$$Q^T Q = I$$

Hvis $m=n$, får vi at $Q^{-1} = Q^T$.

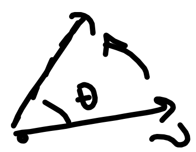
Def
En $n\times n$ matrise Q kalles **ortogonal** hvis

$$\boxed{Q^{-1} = Q^T}$$

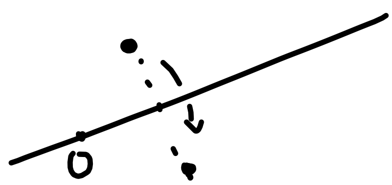
(Ekv.: $(Qx)\cdot(Qy) = x\cdot y$ for alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.)

Eks.
$n=2$

rotasjon



speil



Eks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = [u_1, u_2], \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi bruker Gram-Schmidt prosessen:

$$x_1 = u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, x_1\rangle}{\langle x_1, x_1\rangle} x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Da normaliseres vi:

$$v_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{x_2}{\|x_2\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$Q = \{v_1, v_2\} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$ en ortogonal matrise

$$R = Q^T A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

$$A = QR$$

6.8 Fourierrekker

Anta V er et uendeligdimensjonalt indreproduktrom, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ er et ortogonalt system i V.

Betrakt $W_k = \text{span}\{u_1, \dots, u_k\}$.
Da vet vi at
$$\text{proj}_{W_k}(v) = \frac{\langle v, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 + \dots + \frac{\langle v, u_k\rangle}{\langle u_k, u_k\rangle} u_k .$$

Tallene $a_k = \frac{\langle v, u_k\rangle}{\langle u_k, u_k\rangle}$ kalles Fourierkoeffisientene av v m.h.p. $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$. Det formelle uttrykket

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$$

kalles Fourierrekken til v (m.h.p. $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$).

Kan vi gi mening til dette uttrykket?
Kan vi skrive $v = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$?

Teorem
Anta at $W = \text{span}\{u_n : n \geq 1\}$ er tett i V, dvs for enhver $v \in V$ og $\varepsilon > 0$, kan vi finne $u \in W$ slik at $\|u - v\| < \varepsilon$.
Da, for enhver vektor $v \in V$, har vi
$$\left\| v - \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle v, u_k\rangle}{\langle u_k, u_k\rangle} u_k \right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$
Da skriver vi at $v = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle v, u_k\rangle}{\langle u_k, u_k\rangle} u_k$.

Bevis

Ta $v \in V$, $\varepsilon > 0$.

Vi trenger å vise at
$$\left\| v - \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle v, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} u_k \right\| < \varepsilon \quad \text{for } n \geq n_0$$
for noen n_0.

Vi kan finne $u \in \operatorname{span}\{u_k : n \geq 1\}$ slik at
$$\|v - u\| < \varepsilon .$$

Det finnes m slik at
$$u \in W_m = \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_m\}.$$

For alle $n \geq m$ får vi
$$\left\| v - \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle v, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} u_k \right\| = \| v - \operatorname{Proj}_{W_n}(v) \|$$

den korteste avstanden fra v til vektorer i W_n

$$\leq \| v - \operatorname{Proj}_{W_m}(v) \|$$

$$\leq \| v - u \| < \varepsilon$$

Vi ser at vi kan ta $n_0 = m$. ■

Eks.

$V = C[0, 2\pi]$, $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t) g(t)\, dt$.

Det trigonometriske systemet
$$\{1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots\}$$
Dette er et ortogonalt system.

Faktum

Span$\{1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \ldots\}$
er tett i $C[0, 2\pi]$.

Korollar

For enhver $f \in C[0, 2\pi]$, definer

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt \, dt \quad (k \geq 0),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin kt \, dt \quad (k \geq 1).$$

Da har vi at

$$\left\| f - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Vi skriver da at

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$