7.1

Teorem 2

En $n \times n$ matrise A er ortogonalt diagonaliserbar hvis og bare hvis A er symmetrisk.

Vi fortsetter Bevis

Anta A er symmetrisk.

La $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ være distinkte egenverdier til A.

$$V_i = \{ v \in \mathbb{R}^n : Av = \lambda_i v \} \quad , \quad i = 1, \dots, k.$$

La $\mathcal{B}_i$ være en ortonormal basis for V_i.

Ta $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$, $\mathcal{B}$ er et ortonormalt system. Vi vil vise at $\mathcal{B}$ er en basis.

Betrakt $V = \operatorname{span} \mathcal{B}$, $W = V^{\perp}$.

Det er nok å vise at $W = 0$

(fordi hvis $W=0$, da får vi at

$$V = (V^{\perp})^{\perp} = W^{\perp} = 0^{\perp} = \mathbb{R}^n).$$

Anta $W \neq 0$.

Vi skal vise at det finnes en egenvektor til A i W.

Da får en motsigelse, fordi alle egenvektorene til A ligger i V (og $V \cap W = 0$).

La oss vise at $AW \subset W$
(vi sier at W er et <u>invariant</u> underrom for A).

Merk at $AV \subset V$.
Nå, if $w \in W$, $v \in V$, får vi

$$\langle Aw, v \rangle = \langle \underset{W}{\underset{\cap}{w}}, \underset{V}{\underset{\cap}{Av}} \rangle = 0.$$

Vi konkluderer at $Aw \in V^{\perp} = W$.

Betrakt den lineære avbildningen $B = A|_W : W \to W$.
Vi har

$$\langle Bw_1, w_2 \rangle = \langle w_1, Bw_2 \rangle \text{ for alle } w_1, w_2 \in W.$$

Det følger at hvis $S = \{v_1, \dots, v_\ell\}$ er en ortonormal basis for W, er matrisen $[B]_S$ symmetrisk. Da vet vi at egenverdiene til $[B]_S$ er reelle, så det finnes en egenvektor $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_\ell \end{pmatrix}$ med egenverdi $\lambda \in \mathbb{R}$.

Det betyr at $a_1 v_1 + \dots + a_\ell v_\ell \in W$ er en egenvektor til $B = A|_W$ med egenverdi λ.

Så hvordan finner vi en ortogonal diagonalisering av en symmetrisk matrise?

Oppsummering:

1) finner distinkte egenverdiene $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ til A;

2) finner $V_i = \{v \in \mathbb{R}^n : Av = \lambda_i v\}$, $i = 1, \dots, k$;

3) finner en ortonormal basis for V_i (finner en basis, etterpå brukes Gram-Schmidt prosessen og normaliseres)

4) $\{v_1, \dots, v_n\} = B_1 \cup \dots \cup B_k$ er en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$, $A v_j = \lambda_{i_j} v_j$.

Vi kan skrive at $A = P D P^T$, hvor

$$P = \{v_1, \dots, v_n\}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix}.$$

Eks. (opp. 20, §7.1)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 8 & 5 & -4 \\ -4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 15$ (fra boka)

$$V_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 : Av = -3v\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \right\}$$

$v_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \; v_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ er en basis for V_1.

Gram-Schmidt prosessen:

$$v_1'' = v_1',$$

$$v_2'' = v_2' - \frac{\langle v_2', v_1'' \rangle}{\langle v_1'', v_1'' \rangle} v_1'' = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Normaliserer:

$$v_1 = \frac{v_1''}{\|v_1''\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{v_2''}{\|v_2''\|} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{5}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$\{v_1, v_2\}$ er en ortonormal basis for V_1.

$\lambda_2 = 15$

$$V_2 = \{ v \in \mathbb{R}^3 : Av = 15v \}$$

$$= \mathbb{R} v_3', \quad v_3' = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Normaliserer:

$$v_3 = \frac{v_3'}{\|v_3'\|} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Vi får:

$\{v_1, v_2, v_3\}$ er en ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$,

$$A = PDP^T, \quad P = [v_1, v_2, v_3] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}.$$

La oss oppsummere hva vi har lært om symmetriske matriser:

<u>Teorem 3</u> ("Spektralteoremet for symmetriske matriser")

Anta at A er en $n \times n$ reel symmetrisk matrise. Da gjelder følgende:

a) A har n reelle egenverdier (hvis vi teller med multiplisiteter);

b) dimensjonen til hvert av egenrommene til A er lik den algebraiske multiplisiteten til den tilhørende egenverdien;

c) egenrommene til A er ortogonale til hverandre;

d) A er ortogonalt diagonaliserbar.

<u>Def</u>

Mengden $\operatorname{Sp} A$ av alle (komplekse) distinkte egenverdier til en matrise A kalles <u>spektret</u> til A.

Anta at A en $n \times n$ symmetrisk reel matrise. Da er $A = PDP^T$ for en ortogonal matrise $P = [v_1, \dots, v_n]$ og en diagonal matrise $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$, så $Av_i = d_i v_i$ $(i = 1, \dots, n)$.

Vi har

$$A = PDP^T = [\lambda_1 v_1, \ldots, \lambda_n v_n][v_1, \ldots, v_n]^T$$
$$= \lambda_1 v_1 v_1^T + \ldots + \lambda_n v_n v_n^T$$

Merk:

$v_i v_i^T$ er den ortogonale projeksjonen

$P_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} v_i$

$$\left(P_i w = \frac{\langle w, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i = \langle w, v_i \rangle v_i = (v_i^T w) v_i \right.$$
$$\left. = v_i v_i^T w \right)$$

Derfor kan vi skrive

$$A = \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_n P_n$$

En slik dekomposisjon av A kalles en spektral dekomposisjon

Merk: $P_1 + \ldots + P_n = v_1 v_1^T + \ldots + v_n v_n^T = I$.

Eks.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 8 & 5 & -4 \\ -4 & -4 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(som før)}$$

$$\lambda_1 = -3, \quad v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{5}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = 15, \quad v_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Den ortogonale projeksjonen $P_1 : \mathbb{R}^3 \to V_1$
er

$$P_1 = v_1 v_1^T + v_2 v_2^T = \dots = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix},$$

den ortogonale projeksjonen $P_2 : \mathbb{R}^3 \to V_2$
er

$$P_2 = v_3 v_3^T = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$P_1 + P_2 = I$, $A = -3P_1 + 15P_2$

7.2 Kvadratiske former

Def
En <u>kvadratisk form</u> på $\mathbb{R}^n$ er en funksjon $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ slik at den kan skrives som

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \quad \text{for noen } a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Tallene a_{ij} er <u>ikke</u> entydig bestemt av Q, fordi

$$a_{ij} x_i x_j + a_{ji} x_i x_j = (a_{ij} + a_{ji}) x_i x_j$$

Dette viser at vi kan erstatte a_{ij} og a_{ji} med $\frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}$ for å få $a_{ij} = a_{ji}$ for alle i,j.
Da blir tallene a_{ij} entydig bestemt av Q.

Hvis $Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, kalles $A = (a_{ij})_{i,j}$ <u>matrisen</u> til Q. Merk at

$$Q(x) = \langle x, Ax \rangle = x^T A x.$$

Eks.
1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$Q(x) = \langle x, Ax \rangle = \langle Ax, x \rangle = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_1 + x_2^2$$
$$= x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2.$$

Vi kan også skrive $Q = \langle x, Bx \rangle$ for $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$

$Q(x) = \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$.

Vi ser at Q har ingen kryssledd av typen $x_i x_j$ $(i \neq j)$.