7.2

Anta $Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ er en kvadratisk form på $\mathbb{R}^n$, $Q(x) = x^T A x$ for en (symmetrisk) matrise A.

Det finnes en ortogonal matrise P slik at $Q'(y) = Q(Py)$ har ingen kryssledd.

hvis A symmetrisk, betyr dette at $P^T A P$ er diagonal.

Kolonnene til P danner en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$ som består av egenvektorer til A. Dette gir et nytt koordinatsystem for $\mathbb{R}^n$. Aksene i dette systeme kalles <u>hovedaksene</u>, eller <u>prinsipalaksene</u>, for Q.

<u>Eks.</u> (Opp. 8, §7.2)

$$Q(x) = 9x_1^2 + 7x_2^2 + 11x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_1x_3.$$

Den symmetriske matrisen til Q er

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -4 & 4 \\ -4 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

Egenverdier er $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 9, \lambda_3 = 15$ (fra boka)

Vi finner egenvektorer:

$\lambda_1 = 3$
$$\begin{pmatrix} 6 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$v_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \text{ normaliseres: } v_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 9$
$$v_2 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$\lambda_3 = 15$
$$v_3 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$P = [v_1, v_2, v_3] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Q'(y) = Q(Py) = 3y_1^2 + 9y_2^2 + 15y_3^2$$

Betrakt en kvadratisk form
$$Q(x) = x^T A x \quad , \quad A \text{ symmetrisk}$$
Punktet $0 \in \mathbb{R}^n$ er et stasjonært punkt for Q:
$$\frac{\partial Q}{\partial x_i}(0) = 0.$$
(Fordi $\frac{\partial x_i^2}{\partial x_i} = 2x_i$, $\frac{\partial x_i x_k}{\partial x_i} = x_k \ (k \neq i)$, $\frac{\partial x_j x_k}{\partial x_i} = 0 \ (k, j \neq i)$)

Hva slags stasjonært punkt er 0?

Def

En kvadratisk form Q på $\mathbb{R}^n$ kalles

- positiv definit, hvis $Q(x) > 0$ for alle $x \neq 0$;
  (da er 0 et minimumspunkt for Q)
- negativ definit, hvis $Q(x) < 0$ for all $x \neq 0$;
  (da er 0 et maksimumspunkt for Q)
- indefinit, hvis Q antar både positive og negative verdier;
  (da er 0 et sadelpunkt for Q).

Vi sier også at Q er

- positiv semidefinit, hvis $Q(x) \geq 0$ for alle x;
- negativ semidefinit, hvis $Q(x) \leq 0$ for alle x.

Teorem 5

Anta at Q er en kvadratisk form på $\mathbb{R}^n$, $Q(x) = x^T A x$, $A^T = A$. Da gjelder:

- Q er positiv definit $\Longleftrightarrow$ alle egenverdiene til A er strengt positive;
- Q er negativ definit $\Longleftrightarrow$ alle egenverdiene til A er strengt negative;

- Q er indefinit $\Leftrightarrow$ A har både positive og negative egenverdier ;
- Q er positiv semidefinit $\Leftrightarrow$ alle egenverdiene til A er ≥ 0 ;
- Q er negativ semidefinit $\Leftrightarrow$ alle egenverdiene til A er ≤ 0.

<u>Bevis</u>

Det finnes en ortogonal matrise P slik at

$$P^T A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ er egenverdiene til A

Da får vi at

$$Q'(y) = Q(Py) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2.$$

Q er positiv definit $\Leftrightarrow$ Q' er positiv definit

$\Leftrightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$.

Det samme for alle andre påstander. $\boxtimes$

<u>Merk</u>

Samme terminologi brukes for symmetriske matriser:

for eksempel, vi sier at en symmetrisk matrise A er positiv definit hvis $Q(x) = x^T A x$ er positiv definit, dvs. $x^T A x > 0$ for alle $x \neq 0$
($\Leftrightarrow$ alle egenverdiene til A er strengt positive).

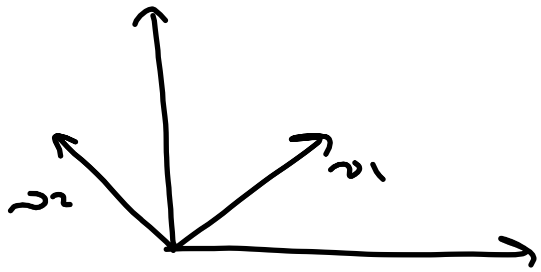
Typen av Q bestemmer formen av nivåmengder til Q. Husk at en <u>nivåmengde</u> til Q er en mengde

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Q(x) = c\} \qquad (c \in \mathbb{R})$$

<u>Eks.</u>

<u>$n=2$</u>

Q er en kvadratisk form på $\mathbb{R}^2$.
Det finnes en ortogonal matrise $P = [v_1, v_2]$
slik at $Q'(y) = Q(Py) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$



$$X_c = \{x \in \mathbb{R}^2 : Q(x) = c\}.$$

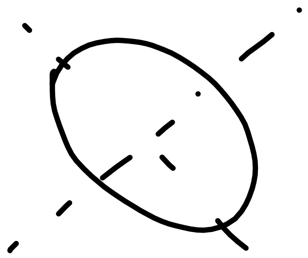
$\lambda_1, \lambda_2 > 0$

X_c, $c > 0$

X_0

$X_c = \emptyset$ for $c < 0$

$\lambda_1, \lambda_2 < 0$



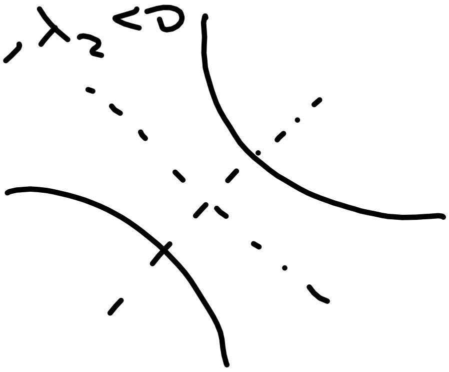
$X_c\ ,\ c < 0$

0

X_0

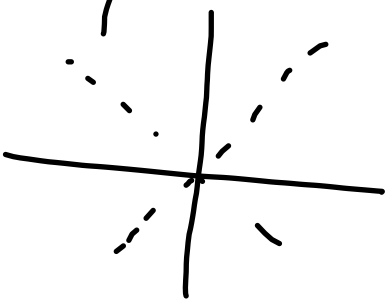
$X_c = \phi$ for $c > 0$.

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$



$X_c\ ,\ c > 0$

$X_c\ ,\ c < 0$



X_0

Eks (Opp. 23,24 i 7.2)

Betrakt en symmetrisk 2×2 matrise

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \qquad (a, b, d \in \mathbb{R})$$

$$Q(x) = x^T A x = a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + d x_2^2 .$$

Q er positiv definit $\iff$ $a > 0$ og $\det A = ad - b^2 > 0$

Q er negativ definit $\iff$ $a < 0$ og $\det A = ad - b^2 > 0$

Q er indefinit $\iff$ $\det A = ad - b^2 < 0$

Q er positiv semidefinit $\iff$ $a, d \geq 0$, $ad - b^2 \geq 0$

Q er negativ definit $\iff$ $a, d \leq 0$, $ad - b^2 \geq 0$

Bevis

La λ_1, λ_2 være egenverdiene til A.

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & d-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \underbrace{(a+d)}_{\mathrm{Tr}\, A}\lambda + \underbrace{(ad - b^2)}_{\det A}$$

(For en matrise $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, definerer vi

sporet til A ved $\mathrm{Tr}\, A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$.)

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1 \lambda_2 .$$

Vi ser

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{Tr}\, A = a + d, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \det A = ad - b^2$$

Q er positiv definit $\Leftrightarrow \lambda_1, \lambda_2 > 0$

$\Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2 > 0, \ \lambda_1 + \lambda_2 > 0$

$\Leftrightarrow ad - b^2 > 0, \ a + d > 0$

$\Leftrightarrow ad - b^2 > 0, \ a > 0.$

Q er negativ definit $\Leftrightarrow -Q$ er positiv definit

$\Leftrightarrow ad - b^2 > 0, \ a < 0$

Q er indefinit $\Leftrightarrow (\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0)$ eller $(\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0)$

$\Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2 < 0$

$\Leftrightarrow ad - b^2 < 0$

Q er positiv semidefinit $\Leftrightarrow \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2 \geq 0, \ \lambda_1 + \lambda_2 \geq 0$

$\Leftrightarrow ad - b^2 \geq 0, \ a + d \geq 0$

$\Leftrightarrow ad - b^2 \geq 0, \ a, d \geq 0.$

Q er negativ semidefinit $\Leftrightarrow -Q$ er positiv semidefinit

$\Leftrightarrow ad - b^2 \geq 0, \ a, d \leq 0.$

Eks

$Q = -x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2$

$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}, \quad a < 0, \ d < 0, \quad ad - b^2 = 0$

Q er negativ semidefinit

(Merk også $Q(x) = -(x_1 + x_2)^2$.)

Faktum (Sylvesterkriteriet)

Betrakt en reel symmetrisk $n \times n$ matrise

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ - & - & - \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Da er A positiv definit hvis og bare hvis

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ - & - & - \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0 \quad \text{for } k = 1, \dots, n$$

A er positiv semidefinit hvis og bare hvis

$$\det \begin{pmatrix} a_{i_1 i_1} & \cdots & a_{i_1 i_k} \\ - & - & - \\ a_{i_k i_1} & \cdots & a_{i_k i_k} \end{pmatrix} \geq 0$$

for alle $k = 1, \dots, n$ og alle $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$