Vi kan bruke samme metoden på andre mengder:

Eks.

$Q(x) = 80x_1^2 - 48x_1x_2 + 45x_2^2$,

$E = \{x \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2}{9} + \frac{x_2^2}{16} = 1\}$

$= \{x \in \mathbb{R}^2 : (\frac{x_1}{3})^2 + (\frac{x_2}{4})^2 = 1\}$

Definer

$Q'(y_1, y_2) = Q(3y_1, 4y_2)$

$= 80(3y_1)^2 - 48(3y_1)(4y_2) + 45(4y_2)^2$

$= \ldots = 144(5y_1^2 - 4y_1y_2 + 5y_2^2)$

Maksimum av $Q$ på $E$ er lik maksimum av $Q'$ på $S = \{y \in \mathbb{R}^2 : y_1^2 + y_2^2 = 1\}$, minimum av $Q$ på $E$ er lik minimum av $Q'$ på $S$.

Vi vet fra ~~første~~ eks. at $Q'_{max}$ på $S$ er $144 \cdot 7$ $Q'_{min}$ på $S$ er $144 \cdot 3$.

Vi konkluderer at

$Q_{max}$ på $E$ er 1008,

$Q_{min}$ på $E$ er 432.

Mer generelt, anta at $Q$ er en kvadratisk form på $\mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^n$ er et underrom. Hvordan kan vi finne $Q_{max}$ og $Q_{min}$ på $S_V = \{v \in V : \|v\| = 1\}$?

La $v_1, \dots, v_\ell$ være en ortonormal basis for $V$. Definer en kvadratisk form på $\mathbb{R}^\ell$ ved

$$Q'(x) = Q(x_1 v_1 + \dots + x_\ell v_\ell).$$

Husk at

$$\| x_1 v_1 + \dots + x_\ell v_\ell \|^2 = x_1^2 + \dots + x_\ell^2.$$

Vi konkluderer at $Q_{max}$ på $S_V$ er det samme som $Q'_{max}$ på $S = \{x \in \mathbb{R}^\ell : \|x\| = 1\}$;

$Q_{min}$ på $S_V$ er det samme som $Q'_{min}$ på $S \subset \mathbb{R}^\ell$.

La $A$ være den symmetriske matrisen til $Q$, $A'$ være den symmetriske matrisen til $Q'$.

Generelt er det vanskelig å si noe om egenverdier til $A'$ hvis vet egenverdier til $A$.

Men noen ganger er dette mulig:

Anta at $u_1, \dots, u_n$ er en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$ som består av egenvektorer til $A$:

Anta at vi deler $\{1, \dots, n\}$ i to mengder

$$\{1, \dots, n\} = I \cup J,$$
$$I = \{i_1, \dots, i_k\}, \quad J = \{j_1, \dots, j_\ell\}.$$

Anta at

$$V = \operatorname{span}\{u_{j_1}, \dots, u_{j_\ell}\} = \{u_{i_1}, \dots, u_{i_k}\}^\perp.$$

Da kan vi ta

$$v_1 = u_{j_1}, \dots, v_\ell = u_{j_\ell}.$$

Vi får

$$Q'(x) = Q(x_1 v_1 + \dots + x_\ell v_\ell)$$
$$= \lambda_{j_1} x_1^2 + \dots + \lambda_{j_\ell} x_\ell^2.$$

Vi kan oppsummere dette som

<u>Teorem</u> (se Teorem 7, Teorem 8)

Betrakt $Q(x) = x^T A x$, $A = A^T$.
Anta $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ er egenverdiene til $A$, $u_1, \dots, u_n$ er en ortonormal basis som består av egenvektorer til $A$: $A u_i = \lambda_i u_i$. Anta at

$$\{1, \dots, n\} = I \sqcup J \quad (I \cap J = \emptyset),$$
$$I = \{i_1 < \dots < i_k\}, J = \{j_1 < \dots < j_\ell\}.$$

Betrakt

$$V = \{u_{i_1}, \dots, u_{i_k}\}^\perp = \operatorname{span}\{u_{j_1}, \dots, u_{j_\ell}\},$$
$$S_V = \{v \in V : \|v\| = 1\}.$$

Da er $\lambda_{j_1}$ maksimum av $Q$ på $S_V$, $\lambda_{j_\ell}$ minimum av $Q$ på $S_V$.

Eks.

$$Q(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Egenverdiene til $A$ er $7, 4, 0$.

En ortonormal basis som består av egenvektorer er

$$u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$Q_{max}$ på $\{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$ er $7$,

$Q_{min}$ på $\{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$ er $0$,

$Q_{max}$ på $\{x \in \mathbb{R}^3 : u_1 \cdot x = 0, \|x\| = 1\}$ er $4$,

$Q_{min}$ på $\{x \in \mathbb{R}^3 : u_1 \cdot x = 0, \|x\| = 1\}$ er $0$,

$Q_{max}$ på $\{x \in \underbrace{\mathbb{R}^3 : u_1 \cdot x = 0, u_3 \cdot x = 0, \|x\| = 1}_{\{-u_2, u_2\}}\}$ er $4$

$\parallel$

$Q_{min}$