Mer om lineære avbildninger

Anta at V, W er vektorrom.
En lineær avbildning en avbildning
$$T : V \to W \quad \text{slik at}$$
$$T(u+v) = Tu + Tv \ , \ T(\alpha u) = \alpha Tu .$$

Bildet til T er
$$\operatorname{Im} T = \{ Tv : v \in V \}.$$

Kjernen til T er
$$\ker T = T^{-1}(0) = \{ v \in V : Tv = 0 \}.$$

Vi sier at T er surjektiv, eller på, hvis
$$\operatorname{Im} T = W.$$

Vi sier at T er injektiv, eller 1-til-1, hvis
$$Tv_1 = Tv_2 \implies v_1 = v_2 .$$

T er en (lineær) isomorfi hvis T er både surjektiv og injektiv. Da har T en invers
$$T^{-1} : W \to V \ , \ T(T^{-1}w) = w \ , T^{-1}(Tv) = v \ ,$$
som er igjen en lineær isomorfi.

Lemma

En lineær avbildning $T : V \to W$ er injektiv hvis og bare hvis $\operatorname{Ker} T = 0$.

Bevis

Anta at T er injektiv.

Da $\operatorname{Ker} T = T^{-1}(0) = 0$.

Anta nå at $\operatorname{Ker} T = 0$. Anta at $Tv_1 = Tv_2$ for noen $v_1, v_2 \in V$. Da

$$T(v_1 - v_2) = Tv_1 - Tv_2 = 0.$$

Vi ser at $v_1 - v_2 \in \operatorname{Ker} T = 0$, så $v_1 = v_2$. ∎

Anta at A er en $m \times n$ matrise.
A definerer en lineær avbildning $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, som vi igjen betegner som A.

A $m \times n$ matrise	$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
$\operatorname{Nul} A$	$\operatorname{Ker} A$
$\operatorname{Col} A$	$\operatorname{Im} A$
$\operatorname{Col} A = \mathbb{R}^m$	surjektiv / $\operatorname{Im} A = \mathbb{R}^m$
$\operatorname{Nul} A = 0$	injektiv / $\operatorname{Ker} A = 0$
invertibel	lineær isomorfi

Anta at $T : V \to W$ en lineær avbildning.
Velg en basis $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ og
$\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$ for V og W.

<u>Matrisen</u> M til T m.h.p. $\mathcal{B}$ og $\mathcal{C}$ er

$$M = \big[\, [Tv_1]_{\mathcal{C}}, \dots, [Tv_n]_{\mathcal{C}} \,\big].$$

Husk at vi har lineære isomorfier

$$V \simeq \mathbb{R}^n, \quad v \mapsto [v]_{\mathcal{B}},$$

$$W \simeq \mathbb{R}^m, \quad w \mapsto [w]_{\mathcal{C}}.$$

$$[Tv]_{\mathcal{C}} = M [v]_{\mathcal{B}}.$$

Dvs:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "M"] & \mathbb{R}^m \\
V \arrow[u, "{[v]_{\mathcal{B}} \mapsfrom v}"] \arrow[r, "T"'] & W \arrow[u, "{w \mapsto [w]_{\mathcal{C}}}"']
\end{tikzcd}$$

<u>kommutativ diagram</u>

<u>Teorem A</u> (Notat 2)

1) T er injektiv $\iff$ M er injektiv;
2) T er surjektiv $\iff$ M er surjektiv;
3) T er en isomorfi $\iff$ M er en isomorfi
($\iff$ M er invertibel)

Bevis

1) Anta at T er injektiv,

$Mx = 0$ for noen x i $\mathbb{K}^n$.

Vi finner $v \in V$ slik at $x = [v]_B$.

$$[Tv]_C = M[v]_B = Mx = 0.$$

Vi konkluderer at $Tv = 0$.

Siden $\operatorname{Ker} T = 0$, får vi at $v = 0$, så

$x = [v]_B = 0$ og derfor $\operatorname{Ker} M = 0$.

- - - - - - -

Husk rangteoremet:

$$\dim \operatorname{Nul}(M) + \dim \operatorname{Col}(M) = n.$$

Det følger at hvis $T : V \to W$ er en lineær avbildning, da har vi

$$\dim \operatorname{Ker}(T) + \dim \operatorname{Im}(T) = \dim V.$$

Det følger at hvis $\dim V = \dim W < \infty$, da har vi

T en isomorfi $\iff \operatorname{Ker} T = 0 \iff \operatorname{Im} T = W$.

$\iff T$ er injektiv $\iff T$ er surjektiv

<u>Eks.</u> (polynominterpolasjon)

La $a_1, \dots, a_{n+1}$ være forskjellige reelle tall. Betrakt en lineær avbilding

$$T : \mathbb{P}_n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1},$$

$\uparrow$ polynomer av grad $\leq n$

$$Tp = (p(a_1), \dots, p(a_{n+1})).$$

Da er T en isomorfi.

Betrakt standardbasisen for $\mathbb{R}^{n+1}$ og basisen $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ for $\mathbb{P}^n$.

Matrisen til T m.h.p. disse basisene er

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n+1} & & a_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

<u>Vandermonde matrisen</u>

$$\det M = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (a_j - a_i) \neq 0.$$

Vi ser at M er invertibel, så er T en isomorfi.

Det følger at for alle $c_1, \dots, c_{n+1}$ finnes det en og bare en polynom p av grad $\leq n$ slik at $p(a_i) = c_i$, $1 \leq i \leq n+1$.

For eksempel, ta

$a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$,

$c_1 = 2$, $c_2 = -1$, $c_3 = 3$, $c_4 = 1$.

Matrisen til T er

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}$$

Hvis vi finner b_1, b_2, b_3, b_4 slik at

$$Mb = c,$$

da er polynomet $p(t) = b_1 + b_2 t + b_3 t^2 + b_4 t^3$.

<u>Merk</u>

For generelle $a_1, \dots, a_{n+1}$ og $c_1, \dots, c_{n+1}$ kan vi skrive

$$p(t) = \sum_{i=1}^{n+1} c_i \frac{(t-a_1)\dots(t-a_{i-1})(t-a_{i+1})\dots(t-a_{n+1})}{(a_i-a_1)\dots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\dots(a_i-a_{n+1})}$$

<u>Eks.</u> (derivasjon og antiderivasjon)

$V = \text{span}\{e^x \sin x, e^x \cos x\}$,

$D: V \to V$, $Df = f'$.

Matrisen til D m.h.p. basisen $\{e^x \sin x, e^x \cos x\}$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

fordi $D(e^x \sin x) = e^x \sin x + e^x \cos x$,

$D(e^x \cos x) = e^x \cos x - e^x \sin x$.

det $M = 2$,

$$M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dette betyr at

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x \sin x - \frac{1}{2} e^x \cos x + C,$$

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x \sin x + \frac{1}{2} e^x \cos x + C$$

Dette kan vi også få ved delvis integrasjon.