H04

Opp. 1

Finn linjen $y = \beta_0 + \beta_1 x$ som gir best mulig tilnærming til punktene $(-1,3), (0,2), (2,1), (3,0)$

Løsning

Definer $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Det eksakte systemet

$$X\beta = y = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En minste kvadraters løsning av dette er en løsning av

$$X^T X \beta = X^T y$$

Vi har

$$X^T X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 14 \end{pmatrix},$$

$$X^T y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$(X^T X)^{-1} = \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 14 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Den eneste løsningen er

$$\beta = (X^T X)^{-1} X^T y = \frac{1}{40}\begin{pmatrix} 14 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{40}\begin{pmatrix} 88 \\ -28 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 22 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Svaret er linjen $\frac{22}{10} - \frac{7}{10}x$.

Opp. 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = [a_1, a_2, a_3]$$

a) Bruk Gram-Schmidt prosessen på a_1, a_2, a_3 for å finne en ortogonal basis for $\mathrm{Col}(A)$. Finn også den tilsvarende ortonormale basisen.

Løsning

$v_1 = a_1$,

$$v_2 = a_2 - \frac{a_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = a_2 - \frac{2}{2} v_1$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$v_3 = a_3 - \frac{a_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \frac{a_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2$$

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\1&2&0\end{pmatrix}$$

$$v_1=a_1,\ v_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$=a_3-\frac{2}{2}v_1-\frac{-1}{3}v_2$$

$$=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{4}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$\{v_1,v_2,v_3\}$ er en ortogonal basis for Col(A).

Normaliserer:

$$u_1=\frac{v_1}{\|v_1\|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

$$u_2=\frac{v_2}{\|v_2\|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},$$

$$u_3=\frac{v_3}{\|v_3\|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\qquad \|v_3\|=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$\{u_1,u_2,u_3\}$ er en ortonormal Basis for Col(A).

b) Verifiser at

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

er en ortogonal matrise. Beregn R slik at $A = QR$. Av hva slags type er matrisen R?

Løsning

Vi ser fra (a) at $Q = \{u_1, u_2, u_3\}$.

Siden $\{u_1, u_2, u_3\}$ er et ortonormalt system, er matrisen Q ortogonal ($Q^T Q = 1$).

Vi har $A = QR$ hvis og bare hvis

$$R = Q^{-1} A = Q^T A$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

en øvre triangulær matrise

Opp. 3

a)
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Finn egenverdiene og egenrommene til A. Vis at A er diagonaliserbar. Angi en matrise P slik at $P^{-1}AP$ er diagonal.

Løsning

Den karakteristiske polynomet til A er

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 8 & -\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2-16)$$

$$= -(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda+4)$$

Vi ser at p_A har røtter 3, 4, −4.

Det følger at A er diagonaliserbar.

$\lambda_1 = 3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$x_3 = 0$, $x_2 = 0$, x_1 er fri

Vi får en egenvektor $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\underline{\lambda_2 = 4}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$x_1 = x_3$, $x_2 = \frac{x_3}{2}$, x_3 fri

Vi får en egenvektor $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{\lambda_3 = -4}$

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$x_1 = -\frac{x_3}{7}$, $x_2 = -\frac{x_3}{2}$, x_3 fri

Vi får en egenvektor $v_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Vi tar $P = [v_1, v_2, v_3] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{7} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Da har vi $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

b)
$$A(c) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & c & 2 \\ 0 & 8 & c \end{pmatrix} \quad (c \in \mathbb{R})$$

For hvilke c er $A(c)$ diagonaliserbar?

Løsning

$$p_{A(c)}(t) = \det(A(c) - tI)$$
$$= \det \begin{pmatrix} 3-t & 0 & 1 \\ 0 & c-t & 2 \\ 0 & 8 & c-t \end{pmatrix}$$
$$= (3-t)((c-t)^2 - 16)$$
$$= (3-t)(c-t-4)(c-t+4).$$

Røttene er 3, $c-4$ og $c+4$.
Når disse tallene er forskjellige, er $A(c)$ diagonaliserbar. Dette skjer når
$$c-4 \neq 3, \; c+4 \neq 3, \text{ dvs. } c \neq 7, -1.$$

$c = -1$

Vi har egenverdiene $3, 3, -5$.

Betrakt $V = \{v \in \mathbb{R}^3 : A(-1)v = 3v\}$.
$A(-1)$ er diagonaliserbar hvis og bare hvis $\dim V = 2$.

$$A(-1)-3I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

$V = \mathrm{Nul}\,(A(-1)-3I)$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 8 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$x_3 = 0$, $x_2 = 0$, x_1 fri

Vi ser at $\dim V = 1$, så er <u>ikke</u> $A(-1)$ diagonaliserbar.

<u>$c=7$</u>

$A(7)$ har egenværdier $3, 3, 11$.

Betragt $V = \mathrm{Nul}(A(7)-3I)$

$= \{ v \in \mathbb{R}^3 : A(7)v = 3v \}$.

$$A(7)-3I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$x_3 = 0$, $x_3 = 0$, x_1 fri.

$\dim V = 1$. $A(7)$ er <u>ikke</u> diagonaliserbar.

Svar: $A(c)$ er diagonaliserbar hvis og bare hvis $c \neq -1, 7$.

M05

Opp. 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & -6 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$W = \mathrm{Col}\,A$. Vi vet $R = \mathrm{rref}\,A$

a) Angi rang A og en basis for W som består av kolonnevektorer til A.

Løsning

Vi ser at R har pivoter i kolonnene 1, 2, 4.

Dette betyr at $\mathrm{rang}\,A = \dim \mathrm{Col}(A) = 3$,

$\mathcal{B} = \{a_1, a_2, a_4\}$ er en basis for $W = \mathrm{Col}(A)$.

b) Angi en lineær avhengighetsrelasjon mellom kolonnevektorene til A.

Angi $[b_1]_{\mathcal{B}}, [b_2]_{\mathcal{B}}$, hvor

$$b_1 = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi har at $a_3 = -2a_1 + 2a_2$

$(-2a_1 + 2a_2 - a_3 + 0 \cdot a_4 = 0)$

Vi har

$b_1 = a_1 + a_3 = a_1 + (-2a_1 + 2a_2) = -a_1 + 2a_2$,

$b_2 = a_2 + a_3 + a_4 = a_2 + (-2a_1 + 2a_2) + a_4$

$= -2a_1 + 3a_2 + a_4$.