H05

Opp. 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & -6 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$W = \mathrm{Col}\, A$, $R = \mathrm{rref}\, A$

c) Sjekk at $a_1 \perp a_2$. Finne en ortogonal basis for W som inneholder a_1, a_2.

Løsning

$a_1 \cdot a_2 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0$, så $a_1 \perp a_2$

Vi vet fra (a) at a_1, a_2, a_4 danner en basis f. $W = \mathrm{Col}\, A$.

For å få en ortogonal basis bruker vi Gram-Schmidt prosessen:

$u_1 = a_1$,

$u_2 = a_2$,

$$u_3 = a_4 - \frac{a_4 \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2 - \frac{a_4 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1$$

$$= a_4 + a_2 - a_1$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$\{\underset{\overset{\shortparallel}{a_1}}{u_1}, \underset{\overset{\shortparallel}{a_2}}{u_2}, u_3\}$ er en ortogonal basis for W.

d) $y = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Vis at $\text{Proj}_W(y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ og finn

avstanden fra y til W.

Løsning

$$\text{Proj}_W y = \frac{y \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \frac{y \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2 + \frac{y \cdot u_3}{u_3 \cdot u_3} u_3$$

$$= \frac{1}{2} u_1 + \frac{6}{24} u_3$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$d(y, W) = d(y, \text{Proj}_W(y))$$

$$= \| y - \text{Proj}_W(y) \|$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

e) $\mathbb{P}_2$ = polynomer av grad ≤ 2,

$S = \{1, t, t^2\}$ en basis for $\mathbb{P}_2$.

Definer $T : \mathbb{P}_2 \to W$, $Tp = A \begin{pmatrix} p(0) \\ p'(0) \\ p(1) \\ p'(1) \end{pmatrix}$

Sjekk at T er lineær.

<u>Løsning</u>

Vi trenger å sjekke at

$T(p+q) = Tp + Tq$, $T(\alpha p) = \alpha Tp$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

$T = T_1 T_2$, hvor

$T_2 : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^4$, $T_2 p = \begin{pmatrix} p(0) \\ p'(0) \\ p(1) \\ p'(1) \end{pmatrix}$,

$T_1 : \mathbb{R}^4 \to W \subset \mathbb{R}^4$, $T_1 x = Ax$

Vi vet at T_1 er en lineær avbildning.
Derfor er det nok å sjekke at T_2 er en lineær avbildning.
At T_2 er en lineær avbildning følger fra at avbildningene

$S_1 : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}$, $S_2 : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}$,

$S_1 p = p(x_0)$, $S_2 p = p'(x_0)$,

er lineære for alle $x_0 \in \mathbb{R}$ (vi trenger dette for $x_0 = 0$, $x_0 = 1$). . . . . .

1) Bestem matrisen til T m.h.p. basisene $S = \{1, t, t^2\}$ for $\mathbb{P}_2$ og $\mathcal{B} = \{a_1, a_2, a_4\}$ for W.

<u>Løsning</u>

$$T(1) = A\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = b_1 \quad (\text{fra } (b))$$

$$= -a_1 + 2a_2$$

$$T(t) = A\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} = b_2 \quad (\text{fra } (b))$$

$$= -2a_1 + 3a_2 + a_4$$

$$T(t^2) = A\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix} = a_3 + 2a_4$$

$$= -2a_1 + 2a_2 + 2a_4 \quad (\text{fra } (b))$$

Derfor er

$$\begin{pmatrix}-1 & -1 & -2\\ 2 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

matrisen til T.

HO 6

Opp. 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi vet at A og B er radekvivalente.

a) Er vektoren $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i Nul A?

Løsning

a) $Av \neq 0$, så $v \notin \text{Nul} A$

b) Finn en Basis for Col A.
Hva er dim(Row A)?

Løsning

Pivotkolonnene til B er 1, 3, 4, 5.
Det følger at a_1, a_3, a_4, a_5 er en Basis for Col A, så $\dim(\text{Col} A) = 4$.
Da får vi at
$$\dim(\text{Row} A) = \dim(\text{Col} A) = 4.$$

Opp. 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Finn egenverdiene til A.

Løsning

Den karakteristiske polynomen til A er

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} 2-t & -1 & 0 \\ 1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 3-t \end{pmatrix} = (3-t)(-t(2-t)+1)$$

$$= (3-t)(t^2-2t+1)$$

$$= -(t-3)(t-1)^2$$

Egenverdiene (med multiplisitet) er 3, 1, 1.

b) Er A diagonaliserbar?

Løsning

A er diagonaliserbar hvis og bare hvis

$\dim V = 2$, $V = \{v \in \mathbb{R}^3 : Av = v\}$.

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Vi ser at $x_3 = 0$, $x_1 = x_2$, x_1 er fri.

Derfor $\dim V = 1$.

A er ikke diagonaliserbar.

Opp. 3

$\mathbb{P}_2$ = polynomer av grad ≤ 2,

$\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ er standardbasisen for $\mathbb{P}_2$.

Betrakt $\mathcal{C} = \{t-2, t+2, 2t^2\}$.

a) Vis at $\mathcal{C}$ er en basis for $\mathbb{P}_2$ og finn overgangsmatrisen fra $\mathcal{B}$ til $\mathcal{C}$.

Løsning

Betrakt

$$P = \left[[t-2]_{\mathcal{B}}, [t+2]_{\mathcal{B}}, [2t^2]_{\mathcal{B}} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det P = -8 \neq 0$$

Det følger at $\mathcal{C}$ er en basis og P er overgangsmatrisen fra $\mathcal{C}$ til $\mathcal{B}$.

Overgangsmatrisen fra $\mathcal{B}$ til $\mathcal{C}$ er

$$Q = P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Merk:

$$\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

(hvis $ad-bc \neq 0$)

6) Betrakt $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$,

$$(Tp)(t) = t\,p'(t) + p(t-1).$$

Vis $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} =: M$

Er T en isomorfi?

Løsning

$T(1) = 1$, $T(t) = t + (t-1) = 2t-1$,

$T(t^2) = 2t^2 + (t-1)^2 = 3t^2 - 2t + 1$.

Vi ser at $[T]_{\mathcal{B}} = M$.

T is en isomorfi hvis og bare hvis $[T]_{\mathcal{B}}$ er invertibel. Vi har $\det [T]_{\mathcal{B}} = 6 \neq 0$.

Vi konkluderer at T er en isomorfi.

Husk: $T : V \to W$

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ en Basis for V,

$\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$ en Basis for W.

$$\begin{tikzcd}
{[v]_{\mathcal{B}}} & \mathbb{R}^n \arrow[r, "{[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}}"] & \mathbb{R}^m & {[w]_{\mathcal{C}}} \\
v \arrow[u, mapsto] & V \arrow[u] \arrow[r, "T"'] & W \arrow[u] & w \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$