H19

Opp.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Finn en Basis for $W = Col(A)$ og en Basis for $Nul(A)$.

Løsning

Vi radreduserer A:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi konkluderer at a_1, a_2 $(A = \{a_1, a_2, a_3\})$ danner en Basis for A.

Vi finner Nul(A):

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1$ er en løsning

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ er en Basis for $Nul(A)$

Husk: Hvis A er en $m \times n$ matrise, da $\dim Col(A) + \dim Nul(A) = n$

b) Finn en ortogonal basis for W.

$\{a_1, a_2\}$ er en basis for W.

Bruker Gram-Schmidt prosessen for å finne en ortogonal basis:

$$v_1 = a_1,$$

$$v_2 = a_2 - \frac{a_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ er en ortogonal basis for W.

c) $y = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$

Finn den ortogonale projeksjonen av y på W.

Finn alle minste kvadraters løsninger av $Ax = y$.

<u>Løsning</u>

$$\text{proj}_W(y) = \frac{y \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \frac{y \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2$$

$$= \frac{8}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{2}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\\2\end{pmatrix}$$

Dette er punktet i $W = \text{Col}(A)$ som er nærmest y.

En minste kvadraters løsning av $Ax = y$ er det samme som en vanlig løsning av

$$Ax = \text{proj}_{\text{Col}(A)}(y)$$

Derfor trenger vi å finne alle løsninger til

$$\begin{pmatrix}1&0&2\\1&2&4\\1&1&3\\1&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

En løsning: $x_1 = 3, x_2 = -1, x_3 = 0$.

Siden $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ er en basis for $\text{Nul}(A)$, får vi at alle løsningene er $\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ $(c \in \mathbb{R})$

(Husk også:
En minste kvadraters løsning til $Ax = y$
er det samme som en løsning til
$A^T A x = A^T y$.)

d) Defineres et indreprodukt på $\mathbb{R}^4$ ved

$$\langle x, y\rangle = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4.$$

Finn en ortogonal basis for W m.h.p. dette indreproduktet. Finn $\hat{y} \in W$ slik $\|y - \hat{y}\|$ er minst mulig, m.h.p. dette indreproduktet.

<u>Løsning</u>

Brukes Gram-Schmidt prosessen på $\{a_1, a_2\}$:

$$w_1 = a_1,$$

$$w_2 = a_2 - \frac{\langle a_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{y} = \text{proj}_W(y) = y - \frac{\langle y, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} - \frac{\langle y, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle}$$

$$= \frac{6}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Opp. 2

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Vis at $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor. Finn en ortogonal matrise P og en diagonal matrise D slik at $A = PDP^T$.

Løsning

Vi kan finne egenverdier, egenvektorer, ...

Vi kan også observere at A er similær til en blokkdiagonal matrise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ har egenverdier $4, 2$ og

egenvektorer $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Det følger at A har egenverdier $4, 2, 4$

og egenvektorer $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Vi ser at u_1, u_2, u_3 er ortogonale.
Vi normaliserer for å få en ortonormal
Basis som består av egenvektorer:

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$v_2 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = u_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$v_3 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Nå har vi $P = \{v_1, v_2, v_3\} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$,

$D = \begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$. Da har vi at

$AP = PD$, eller $A = PDP^T$.

b) Finn en løsning til

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\end{cases}$$

<u>Løsning</u>

En løsning til $x' = Ax$ er $x = e^{tA}c$

Vi har $e^{tA} = Pe^{tD}P^T = P\begin{pmatrix} e^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{4t} \end{pmatrix}P^T$

Det følger at en løsning er

$$x(t) = c_1 e^{4t} v_1 + c_2 e^{4t} v_2 + c_3 e^{2t} v_3$$

$$= c_1 e^{4t}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{4t}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Vi trenger $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Vi får

$$\begin{cases} \frac{c_1}{\sqrt{2}} + \frac{c_3}{\sqrt{2}} = 1 \\ c_2 = 1 \\ \frac{c_1}{\sqrt{2}} - \frac{c_3}{\sqrt{2}} = 3 \end{cases}$$

Vi får

$$\frac{c_1}{\sqrt{2}} = 2, \quad c_2 = 1, \quad \frac{c_3}{\sqrt{2}} = -1.$$

Svar: $x(t) = 2e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{4t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$- e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Opp. 3

$\mathcal{B} = \{1, e^x \cos x, e^x \sin x\} \subset C^\infty(\mathbb{R})$

La $V = \text{span}\,\mathcal{B}$, vi vet at $\mathcal{B}$ er en basis for V.

La $\mathcal{C} = \{1 + e^x \cos x, 1 + e^x \sin x, e^x(\cos x + \sin x)\}$

a) Vis at $\mathcal{C}$ er en basis for V. Finn basisskiftematrisen $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}$ fra $\mathcal{C}$ til $\mathcal{B}$ og basisskiftematrisen $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ fra $\mathcal{B}$ til $\mathcal{C}$.

Løsning

$$[1 + e^x \cos x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$[1 + e^x \sin x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$[e^x(\cos x + \sin x)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Betrakt $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Vi ser at $\det M = -2 \neq 0$.

Vi konkluderer at $\mathcal{C}$ er en basis og $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P} = M$

Vi har $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = \left(\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}\right)^{-1} = M^{-1}$

Radreduserer

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Vi konkluderer at

$$\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$