14/9

Opp. 3

$\mathcal{B} = \{1, e^x \cos x, e^x \sin x\}$

$V = \operatorname{span} \mathcal{B} \subset C^\infty(\mathbb{R})$

$\mathcal{C} = \{1 + e^x \cos x, 1 + e^x \sin x, e^x(\cos x + \sin x)\}$

b) $T : V \to V$ definert ved

$$T(f) = f'$$

Finn en $[T]_\mathcal{B}$ slik at $[Tf]_\mathcal{B} = [T]_\mathcal{B} [f]_\mathcal{B}$

og en matrise $[T]_\mathcal{C}$ slik at $[Tf]_\mathcal{C} = [T]_\mathcal{C} [f]_\mathcal{C}$

Løsning

Vi har

$1' = 0$, $(e^x \cos x)' = e^x \cos x - e^x \sin x$,

$(e^x \sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x$.

Vi får

$$[T]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[T]_\mathcal{C} = \underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{P} [T]_\mathcal{B} \underset{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}{P}$$

$$\underset{\text{fra a)}}{=} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $S : V \to V$ definert ved

$$Sf = f'' - 2f' + 2f$$

Finn $[S]_{\mathcal{B}}$ $\left([Sf]_{\mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{B}} [f]_{\mathcal{B}} \right)$

Finn $\ker S = \{ f \in V : Sf = 0 \}$

<u>Løsning</u>

Vi har $S = T^2 - 2T + 2I$.

Det følger

$$[S]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^2 - 2[T]_{\mathcal{B}} + 2I$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Nul}([S]_{\mathcal{B}}) = \{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0 \}$$

$$= \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dette betyr at

$\ker S = \mathrm{span}\{ e^x \cos x, e^x \sin x \}$.

Opp. 4

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Avgjør om A er diagonaliserbar.

Løsning

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4)$$

$$= (4-\lambda)(\lambda-2)^2$$

Vi ser at A har egenverdier 4, 2, 2.

A diagonaliserbar hvis og bare hvis

$\dim V = 2$, hvor $V = \{ x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 2x \}$.

For å finne V trenger vi å løse

$$\begin{cases} 2x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$x_1 = 0$, $x_3 = -x_2$

Vi har bare en fri variabel. Derfor

$\dim V = 1$.

Vi konkluderer at A er ikke diagonaliserbar.

Merk:

1) $\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{A_k} \end{pmatrix}$ er diagonaliserbar hvis og bare hvis matrisene $A_1, \dots, A_k$ er diagonaliserbare.

$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ er diagonaliserbar

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ er diagonaliserbar.

2) Hvis en $n \times n$ matrise A har bare en reell egenverdi λ, da er A diagonaliserbar hvis og bare hvis $A = \lambda I = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$.

$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ har egenverdier $2, 2$ og $B \neq \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Vi konkluderer at B er <u>ikke</u> diagonaliserbar.

6) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

Bestem en singulærverdidekomposisjon $B = U \Sigma V^T$. Finn en vektor y slik at

$\|y\| = 1, \quad \|By\| = \max \{ \|Bx\| : \|x\| = 1 \}$.

Løsning

Vi har

$$B^T B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & -32 \\ 0 & -32 & 32 \end{pmatrix}$$

$B^T B$ har egenverdier $64, 4, 0$.

Det følger at B har singulærverdier $\sigma_1 = 8, \sigma_2 = 2, \sigma_3 = 0$.

Vi har $\Sigma = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ortonormale egenvektorer for $B^T B$ med egenverdier $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2$ er

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Definer $V = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Definer

$$u_1 = \frac{Bv_1}{\sigma_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$u_2 = \frac{Bv_2}{\sigma_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi utvider $\{u_1, u_2\}$ til en ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$:

$$u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Defineres $U = \{u_1, u_2, u_3\}$.

<u>Merk</u>

1) Anta at B er en $m \times n$ matrise. La $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ være egenverdier til $B^T B$, $v_1, \dots, v_n$ en ortonormal basis som består av egenvektorer, $B^T B v_i = \lambda_i v_i$.

$$\|Bv_i\| = \langle Bv_i, Bv_i \rangle^{1/2} = \langle v_i, B^T B v_i \rangle^{1/2}$$
$$= \lambda_i^{1/2} \langle v_i, v_i \rangle^{1/2} = \lambda_i^{1/2},$$

$$\langle Bv_i, Bv_j \rangle = \langle v_i, B^T B v_j \rangle = \lambda_j \langle v_i, v_j \rangle \underset{i \neq j}{=} 0$$

2)
$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{A_k} \end{pmatrix}$$

Anta at vi har singulærverdidekomposisjoner

$$A_i = U_i \Sigma_i V_i^T, \quad \Sigma_i = \begin{pmatrix} \sigma_{i1} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_{ik_i} & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Da $A = U \Sigma V^T$, hvor $U = \begin{pmatrix} U_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & U_k \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} V_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & V_k \end{pmatrix}$, $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Sigma_k \end{pmatrix}$