H20

Opp.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Finn en basis $\mathcal{B}$ for $\mathrm{Col}(A)$ som består av kolonnevektorer til A.
Skriv alle andre kolonnene som lineære kombinasjoner av vektorene i $\mathcal{B}$.

Løsning

Skriv $A = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5]$

Kolonnene 1, 2, 4 i R har pivoter. Vi konkluderer at $\mathcal{B} = \{a_1, a_2, a_4\}$ er en basis for $\mathrm{Col}(A)$.

De lineære avhengighetene mellom kolonnene i er de samme som mellom kolonnene i R. Det følger

$$a_3 = a_1 - a_2, \quad a_5 = -\frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_4.$$

b) Bestem $\dim \mathrm{Nul}(A)$. Finn en 5×3 matrise B slik at $\mathrm{rank}\, B = 2$ og $AB = 0$.

Løsning

A er en 4×5 matrise. Det følger

$\dim \mathrm{Nul}(A) = 5 - \dim \mathrm{Col}(A) = 2.$

Vi trenger å finne B slik at

$$\mathrm{Col}(B)\ (=\mathrm{Im}\,B) = \mathrm{Nul}(A)\ (=\ker A)$$

La oss først finne en basis for $\mathrm{Nul}(A)$.

Fra a) vet vi at

$$a_1 - a_2 - a_3 = 0, \quad -\tfrac{1}{2}a_1 - \tfrac{1}{2}a_2 + \tfrac{1}{2}a_4 - a_5 = 0.$$

Det følger at

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Nul}(A).$$

Disse vektorene er lineært uavhengige.
Det følger at de danner en basis for $\mathrm{Nul}(A)$.
Vi kan ta

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Oppg. 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Begrunn at A er diagonaliserbar.
Finn en basis for $\mathbb{R}^3$ som består av egenvektorer for A.

Løsning

Vi har $p_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda^2+\lambda)$

$= -\lambda(\lambda+1)^2$.

Egenverdiene (med multiplisitet) er

$0, -1, -1$.

Betrakt $V = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = -x\}$.

For å vise at A er diagonaliserbar, trenger vi å sjekke at $\dim V = 2$.

$V = \mathrm{Nul}(A+I)$,

$$A+I = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$V = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$

Vi ser at $\dim V = 2$, så er A diagonaliserbar.

Vi kan ta

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ som en basis for V.

Vi har

$$v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Nul}(A).$$

$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ er en basis for $\mathbb{R}^3$ som består av egenvektorer til A.

b) Ta en vektor $x_0 \in \mathbb{R}^3$. Betrakt følgen $\{x_k\}_k$ i $\mathbb{R}^3$ gitt ved $x_{k+1} = Ax_k$ ($k \geq 0$).

Bevis at $\|x_k\| = C$ for alle $k \geq 1$ for en konstant C (avhengig av x_0).

Løsning

Ta Basisen $\{v_1, v_2, v_3\}$ fra a). Vi kan skrive
$$x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3.$$
Vi har
$$x_k = A^k x_0 = c_1(-1)^k v_1 + c_2(-1)^k v_2 \quad (k \geq 1)$$
Vi ser
$$\|x_k\| \underset{k\geq 1}{=} \|c_1(-1)^k v_1 + c_2(-1)^k v_2\|$$
$$= \|c_1 v_1 + c_2 v_2\|.$$

Opp. 3

$\mathbb{P}_2$ = polynomer av grad ≤ 2.

$p_1(x) = x - 1$, $p_2(x) = x^2$, $W = \text{span}\{p_1, p_2\} \subset \mathbb{P}_2$

a) Betrakt punktene $(-1,1), (0,1), (1,1)$ i $\mathbb{R}^2$.
Bruk minste kvadraters metode for å finne $\hat{c}_1, \hat{c}_2$ slik at $p = \hat{c}_1 p_1 + \hat{c}_2 p_2$ tilpasser disse punktene best mulig:
$$(p(-1) - 1)^2 + (p(0) - 1)^2 + (p(1) - 1)^2$$
er minst mulig.

Løsning

Vi trenger å finne en minste kvadraters løsning av
$$X\hat{c} = y$$
hvor $\hat{c} = \begin{pmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} p_1(-1) & p_2(-1) \\ p_1(0) & p_2(0) \\ p_1(1) & p_2(1) \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bruker de normale likningene:
$$X^T X \hat{c} = X^T y.$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X^T X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$X^T y = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Vi får

$$\begin{pmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

$$p(x) = -\frac{1}{3}(x-1) + \frac{2}{3}x^2.$$

b) Definer et indreprodukt på $\mathbb{P}_2$ ved

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

Finn en ortogonal basis for W og finne $\text{proj}_W q$ for $q(x) = 1$.

<u>Løsning</u>

$\{p_1, p_2\}$ er en basis for W. Vi bruker Gram-Schmidt prosessen for å finne en ortogonal basis:

$q_1 = p_1$,

$$q_2 = p_2 - \frac{\langle p_2, q_1\rangle}{\langle q_1, q_1\rangle} q$$

$$= p_2 - \frac{(-1)^2(-2)+0+0}{(-2)^2+(-1)^2+0} q_1$$

$$= p_2 + \frac{2}{5} q_1 = x^2 + \frac{2}{5}(x-1).$$

Det følger at

$$\text{proj}_W q = \frac{\langle q, q_1\rangle}{\langle q_1, q_1\rangle} q_1 + \frac{\langle q, q_2\rangle}{\langle q_2, q_2\rangle} q_2$$

$$= \ldots = -\frac{1}{3}(x-1) + \frac{2}{3}x^2.$$

Alternativt:

Vi observerer at $\begin{pmatrix} q(-1) \\ q(0) \\ q(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Det følger at $\text{proj}_W q$ gir en polynom $p = \hat{c}_1 p_1 + \hat{c}_2 p_2$ slik at

$$(p(-1)-1)^2 + (p(0)-1)^2 + (p(1)-1)^2$$

er minst mulig. Fra del a) konkluderer vi at

$$\text{proj}_W q = -\frac{1}{3}(x-1) + \frac{2}{3}x^2.$$

Opp 4

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

La $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gitt ved $T(x) = Ax$.

a) Begrunn at A er positiv definitt.
Finn en ortonormal basis $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ slik at $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Løsning

A er symmetrisk.
A har egenverdier $6, 1$ som er strengt positive
Dette betyr at A er positiv definitt.