H20

Opp 4

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Finn en ortonormal basis $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ slik at $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, hvor $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $Tx = Ax$.

Løsning

A har egenverdier 1, 6.

Tilsvarende egenvektor er

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ og } \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi normaliserer:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi får en ortonormal basis $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$.

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

b) Finn 2x2 matrisen Q slik at $[x]_{\mathcal{B}} = Qx$ $(x \in \mathbb{R}^2)$. Ta $y \in \{Tx : \|x\| = 1\}$ og sett $(y_1', y_2') = [y]_{\mathcal{B}}$. Vis at $(y_1')^2 + \frac{(y_2')^2}{6^2} = 1$.

Løsning

La $\mathcal{E}$ være standardbasisen for $\mathbb{R}^2$.

Da $Q = \underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}{P}$. Vi har

$$\underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}{P} = \underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{P}^{-1} = \underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{P}^{T} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ er ortogonal

La $y = Tx$

$$[y]_{\mathcal{B}} = [Tx]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1' \\ 6x_2' \end{pmatrix}.$$

Det følger

$$(y_1')^2 + \frac{(y_2')^2}{6^2} = (x_1')^2 + \frac{(6x_2')^2}{6^2}$$

$$= (x_1')^2 + (x_2')^2$$

$$= \|[x]_{\mathcal{B}}\|^2$$

$$= \|x\|^2,$$ fordi $\mathcal{B}$ er en ortonormal basis

$([x]_{\mathcal{B}} = Qx$ og Q er ortogonal$)$

c) Anta at B en (reell) positiv definit matrise. Begrunne at B er invertibel og B^{-1} er positiv definit.

(Husk at en positiv definit matrise er en symmetrisk matrise B slik at

$$x^T B x > 0 \text{ for alle } x \neq 0,$$

ekvivalent, B har strengt positive egenverdier.)

<u>Løsning</u>

Alle egenverdiene til B er strengt positive, så er B invertibel.

$$(B^{-1})^T = (B^T)^{-1} = B^{-1}$$

(<u>Bevis</u>:

Anta at A er en invertibel matrise:

$$A A^{-1} = I \quad (\text{og } A^{-1}A = I)$$

Det følger at

$$(A^{-1})^T A^T = I$$

Dette viser at A^T er invertibel og

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T. \;)$$

Vi ser at B^{-1} er symmetrisk.

Hvis B har egenverdier $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, da er $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$ egenverdiene til B^{-1}.

(Bevis 1 (for diagonaliserbar matriser)
Hvis A er en invertibel, diagonaliserbar matrise,

$$A = PDP^{-1}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Da har vi at

$$A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = PD^{-1}P^{-1} = P\begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}P^{-1}$$

Bevis 2 (for generelle matriser)
Anta at $\lambda \neq 0$ er en egenverdi til en invertibel matrise A. Ta en egenvektor:

$$Av = \lambda v \qquad (v \neq 0)$$

Bruk A^{-1}:

$$\underbrace{A^{-1}Av}_{= v} = \lambda A^{-1}v$$

Det følger at $A^{-1}v = \lambda^{-1}v$, så er λ^{-1} en egenverdi til A^{-1}.

Bevis 3:

$$p_{A^{-1}}(\lambda) = \det(A^{-1} - \lambda I) = \det(-\lambda(A - \lambda^{-1}I)A^{-1})$$
$$= (-\lambda)^n (\det A^{-1})\, p_A(\lambda^{-1}).$$

A er $n\times n$ matrise

Dette viser at λ er en rot til $p_{A^{-1}}$ hvis og bare hvis λ^{-1} er en rot til p_A.)

Det følger at B^{-1} er positiv definit.

Alternativt:

Vi har $x^T B x > 0$ for alle $x \neq 0$.

Bruk dette for $x = B^{-1} y$, $y \neq 0$. Vi har

$$
\begin{aligned}
0 < x^T B x &= (B^{-1} y)^T B B^{-1} y \\
&= y^T (B^{-1})^T B B^{-1} y \\
&= y^T B^{-1} B B^{-1} y \\
&= y^T B^{-1} y.
\end{aligned}
$$

H17

Opp. 2a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$W = \mathrm{Col}(A)$.

Finn en ortonormal basis $\mathcal{B}$ for W.

Finn en QR-faktorisering av A.

Løsning

$A = [a_1, a_2]$.

Brukes Gram-Schmidt prosessen for å finne en ortogonal basis:

$$v_1 = a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$v_2 = a_2 - \frac{a_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Normaliseres for å finne en ortonormal basis:

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi har

$$Q = \{w_1, w_2\} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$R = Q^T A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Oppg. 4a

$p_0 = 1,\ p_1 = t,\ p_2 = t^2$

$\mathcal{B} = \{p_0, p_1, p_2\}$ er standardbasisen for $\mathbb{P}_2$.

Betrakt

$q_1 = 1+t,\ q_2 = t+t^2,\ q_3 = t-t^2$

Begrunn at $\mathcal{C} = \{q_1, q_2, q_3\}$ er en basis for $\mathbb{P}_2$ og finn basisskiftematrisene $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}$ og $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$.

Løsning

Betrakt $P = \{[q_1]_{\mathcal{B}}, [q_2]_{\mathcal{B}}, [q_3]_{\mathcal{B}}\}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Denne matrisen er invertibel og

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{(fra MatCal-utskriften)}$$

Det følger at $\mathcal{C}$ er en basis,

$$\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P} = P \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = P^{-1}.$$