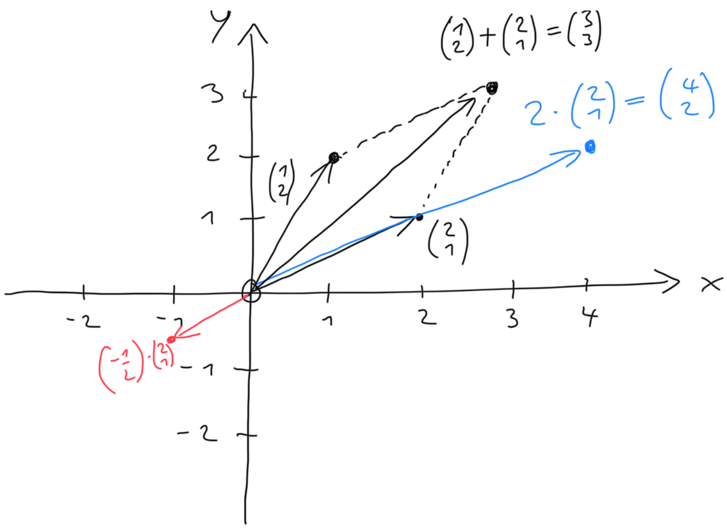
VEKTORROM OG UNDERROM (SEC. 4.1)

Vektorrom er en generalisering av $\mathbb{R}^2$ (eller $\mathbb{R}^n$) som i har set før (se Figure 1).

- F.eks., $\mathbb{R}^2$ består av søylevektorer
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$
- Kan adderes komponentevis
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}.$$
- Kan multipliseres med skalarer (dvs. reelle tal)
$$c \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_1 \\ ca_2 \end{pmatrix}.$$



FIGUR 1. Addition og skalering i $\mathbb{R}^2$

Hvorfor har vi bruge for mere generalle vektorrom? Lineær algebra giver jer et utroligt nyttig toolkit til at løse problemer som oppstår i naturvidenskab, matematik, økonomi eller datalogi. Vi kommer til at se mange av disse eksempler i følge av kurset. Den følgende definisjon introducer denne setting hvor lineær algebraiske metoder kan anvendes.

Definisjon. *En vektorrom er en mengde V (av vektorer) utstyrt med to operationer:*

- ***Addition:*** *For hvert $\vec{u}, \vec{v} \in V$ findes der et element $\vec{u} + \vec{v} \in V$.*
- ***Skalar multiplikasjon:*** *For hvert $\vec{u} \in V$ og $c \in \mathbb{R}$ findes der et element $c \cdot \vec{u} \in V$.*

De to operationer opfyller de følgende aksiomer for hvert $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ og hvert $c, d \in \mathbb{R}$:

(1) Der finnes en nullvektor $\vec{0} \in V$ sodan at $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$.

(2) Der finnes en vektor $-\overrightarrow{u} \in V$ *sodan at* $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = 0$.
(3) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$.
(4) $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$.
(5) $c(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = c\overrightarrow{u} + c\overrightarrow{v}$.
(6) $(c+d)\overrightarrow{u} = c\overrightarrow{u} + d\overrightarrow{u}$.
(7) $c(d\overrightarrow{u}) = (c \cdot d)\overrightarrow{u}$.
(8) $1 \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.

Hva er den mindste vektorrom? Tænk over det et øjeblik. Kan en vektorrom være tomt, i.e., indholde ikke nogen vektorer? Nej, det kan den ikke fordi hvert vektorrom inneholder en nullvektor. Hvis vi nu kun har et nullvektor og ikke nogen andere vektorer; kan det være et vektorrom. Ja, den mindste vektorrom er $\{0\}$ som kun inneholder nullvektoren (sjekk det!). Kan en vektorrom inneholde to forskellige nullvektorer, i.e., to vektorer som oppfylder den første aksiom? Man kan vise fra definisjonen at det kan ikke sker. Nullvektoren i en vektorrom er unik!

Lad os kom til nogen mere konkrete eksempler av vektorrom:

Eksempel (Eksempler av vektorrom)**.**

(1) $\mathbb{R}^n$ med vanlig vektoraddisjon (komponentvis) og skalar multiplikasjon.
(2) Mængden $\mathcal{M}_{m\times n}$ av $m \times n$ matriser med addisjon og skalarmultiplikasjon definert komponentevis.
(3) **Signalrommet:** $\mathbb{S}$ mængden av uendlige følger på formen

$$\{a_n\} = (\ldots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots),$$

med addisjon og skalarmultiplikasjon definert komponentevis:

$$\begin{aligned}(\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots) &+ (\ldots, b_{-1}, b_0, b_1, \ldots) \\ &= (\ldots, a_{-1}+b_{-1}, a_0+b_0, a_1+b_1, \ldots),\end{aligned}$$

og

$$\lambda(\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots) = (\ldots, \lambda a_{-1}, \lambda a_0, \lambda a_1, \ldots).$$

Sjekk at aksiomerne er tilfredstitt med

$$0 = (\ldots, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots) \quad \text{og} \quad -\{a_n\} = (\ldots, -a_{-1}, -a_0, -a_1, \ldots)$$

Signalrommet popper op f.eks. i analysen av elektriske signaler hvor et kontinuert signal bliver målt i konstante tidsavstand. Diskretiseringen man får på denne måle svarer til en vektor i signalrommet (se Figure 3).
(4) Mængden $\mathbb{P}^n$ av polynomier med grad $\leq n$, i.e., polynomier av formen

$$\overrightarrow{p}(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n,$$

hvor $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Hvordan er addisjonen og skalarmultiplikasjonen definert? Hvis $\overrightarrow{q}(t) = b_0 + b_1 t + \ldots + b_n t^n$ så sætter vi

$$(\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q})(t) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)t + \ldots + (a_n + b_n)t^n,$$

og

$$(c\overrightarrow{p})(t) = ca_0 + ca_1 t + \ldots + ca_n t^n.$$

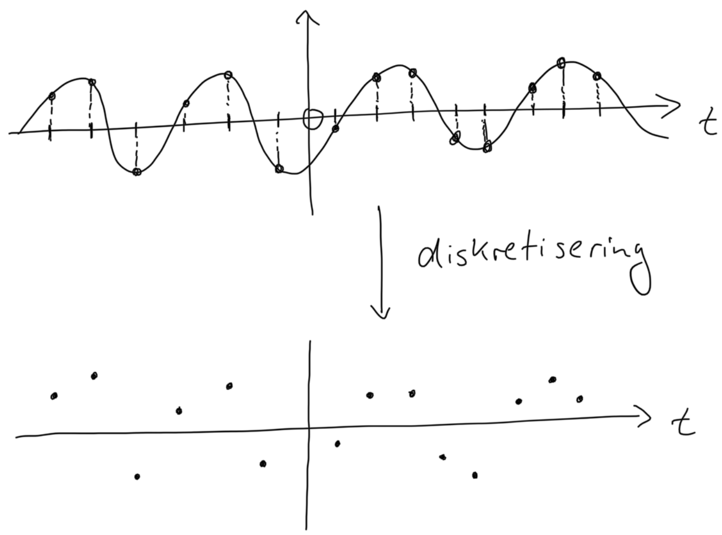
Nu kan vi sjekke aksiomerne med

$$0 = 0 + 0 \cdot t + \ldots + 0 \cdot t^n,$$

og

$$-\overrightarrow{p} = -a_0 - a_1 t - \ldots - a_n t^n.$$

(5) Alle reelle funksjoner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
(6) Alle reelle funksjoner $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.
(7) $\cdots$



FIGUR 2. Diskretisering av et kontinuert signal.

Eksempler (3) og (4) er lidt spænnende. Polynomierne som ligger i $\mathbb{P}_n$ er jo også reelle funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$. Det er en eksempel av et mere generalt konsept:

Definisjon (Underrom)**.** *Et underrom H av et vektorrom V er en undermængde $H \subseteq V$ som tilfredstiller:*

(1) Nullvektoren $\overrightarrow{0} \in V$ ligger også i H.
(2) H er lukket under addisjon, dvs. hvis $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in H$ så er $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in H$.
(3) H er lukket under skalarmultiplikasjon, dvs. hvis $\overrightarrow{u} \in H$ og $c \in \mathbb{R}$ så er $c\overrightarrow{u} \in H$.

Lad os sjekk at en underrom av et vektorrom er selv et vektorrom: Aksiomerne (1), (3), (4), (5), (6), (7) og (8) er opfyld fra definisjonen av underrom. For at sjekke aksiom (2) lad os tag et $\overrightarrow{u} \in H$. Vi vil at $(-1)\overrightarrow{u} \in H$ fra underromsaksiomerne. Nu kan vi se at

$$\overrightarrow{u} + (-1)\overrightarrow{u} = 1 \cdot \overrightarrow{u} + (-1)\overrightarrow{u} = (1 + (-1))\overrightarrow{u} = 0 \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}.$$

Her har vi brugt at $0 \cdot u = \overrightarrow{0}$ for hvert vektor $\overrightarrow{u}$ (det kan vises med vektorromsaksiomerne$\rightsquigarrow$ Hjemmeopgaver). Lad os se nogen eksempler:

Eksempel (Underrom)**.**

(1) Mængden
$$H = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \;:\; s, t \in \mathbb{R} \right\}$$
er et underrom av $\mathbb{R}^3$ som "ser ud" som $\mathbb{R}^2$. Husk at $\mathbb{R}^2$ er *ikke* et underrom av $\mathbb{R}^3$ (fordi $\mathbb{R}^2 \not\subseteq \mathbb{R}^3$)!
(2) $\mathbb{P}_n$ er et underrom av de reelle funksjoner.
(3) $\mathbb{P}_n$ er også et underrom av de generalle polynomier $\mathbb{P}$ (uden restriksjon på grad).

(4) $\mathbb{S}_f$ er mængden av uendlige følger $\{a_n\} \in \mathbb{S}$ hvor kun endelig mange a_n er ikke null. For eksempel

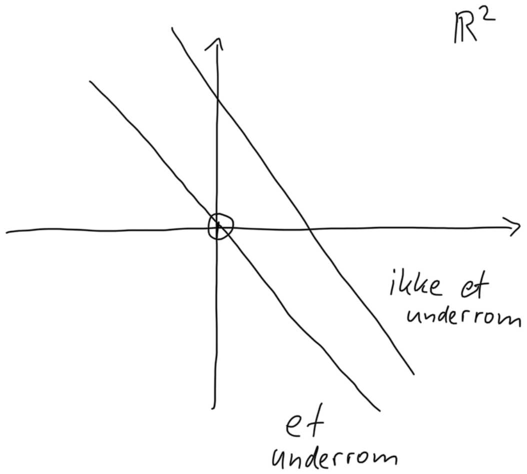
$$(\ldots, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 0, 0, \ldots) \in \mathbb{S}_f.$$

$\mathbb{S}_f$ er et underrom av $\mathbb{S}$. Er det klart hvorfor den er lukket under (komponentevise) addisjon? Lad $\sharp\{a_n \neq 0\}$ være antallet av elementer i følgen $\{a_n\}$ som ikke er null. Så kan man sjekke at

$$\sharp\{a_n + b_n \neq 0\} \leq \sharp\{a_n \neq 0\} + \sharp\{b_n \neq 0\}.$$

Derfor er $\{a_n\} + \{b_n\} \in \mathbb{S}_f$ hvis $\{a_n\} \in \mathbb{S}_f$ og $\{b_n\} \in \mathbb{S}_f$.

(5) Et linie gjennom $\overrightarrow{0}$ i $\mathbb{R}^2$ er et underrom av $\mathbb{R}^2$. Et plan gjennom $\overrightarrow{0}$ i $\mathbb{R}^3$ er et underrom av $\mathbb{R}^3$. Et plane som ikke går gjennom $\overrightarrow{0}$ er *ikke* et underrom!



FIGUR 3. Underrom av $\mathbb{R}^2$?

Underrom popper op naturligt vis man starter med en mængde av vektorer og generer deres span, dvs. mængden a alle vektorer som kan skrives som lineær kombination av vektorer fra startmængden: For vektorer $\{\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_n\} \subset V$ vi definerer

$$\text{span}\{\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_n\} = \{\sum_{i=1}^{n} c_i \overrightarrow{v}_i \ : \ c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}\}.$$

Teorem 1. *Hvis $\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_n \in V$ så er span$\{\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_n\}$ et underrom av V.*

Bevis. Lad os se på den tilfald hvor $n = 2$. Generalle tilfald laves på sammen måde. For $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2 \in V$ er det klart (efter aksiomerne) at

$$\text{span}\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2\} \subseteq V.$$

Nullvektoren kan skrives som $\overrightarrow{0} = 0 \cdot \overrightarrow{v}_1 + 0 \cdot \overrightarrow{v}_2 \in \text{span}\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2\}$. Nu tag vektorer $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \in \text{span}\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2\}$ som kan skrives

$$\overrightarrow{u} = c_1 \overrightarrow{v}_1 + c_2 \overrightarrow{v}_2 \quad \text{og} \quad \overrightarrow{w} = d_1 \overrightarrow{v}_1 + d_2 \overrightarrow{v}_2.$$

Vi har

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} = (c_1 \overrightarrow{v}_1 + c_2 \overrightarrow{v}_2) + (d_1 \overrightarrow{v}_1 + d_2 \overrightarrow{v}_2) = (c_1 + d_1) \overrightarrow{v}_1 + (c_2 + d_2) \overrightarrow{v}_2 \in \text{span}\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2\}.$$

Til sidst sjekker vi at

$$c \cdot \overrightarrow{u} = c(c_1 \overrightarrow{v}_1 + c_2 \overrightarrow{v}_2) = (cc_1) \overrightarrow{v}_1 + (cc_2) \overrightarrow{v}_2 \in \text{span}\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2\}.$$

$\square$

Underrommet span$\{\overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_n\}$ er også kæld for underrommet spannet av vektorer $\{\overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_n\}$. Lad os til sidst se på nogen naturlige spørsmål om spannet:

Oppgave 1. Vis at

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a-3b \\ b-a \\ a \\ b \end{pmatrix} \ : \ a, b \in \mathbb{R} \right\},$$

er et underrom av $\mathbb{R}^4$.

Bevis. Vi kunne sjekke alle aksiomer av underrom men der er en nemmer løsning. Lad os skrive

$$\begin{pmatrix} a-3b \\ b-a \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3b \\ b \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nu kan vi se at

$$H = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

og det er et underrom efter Teorem 1. $\square$

Oppgave 2. For hvilke tal $h \in \mathbb{R}$ er

$$\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ h \end{pmatrix},$$

i spannet av vektorer

$$\overrightarrow{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{y}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}, \overrightarrow{y}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bevis. Vi vil finde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ så at

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ -1 & -4 & 1 \\ -2 & -7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

med matrise-vektor multiplikasjon. Vi skal løse et linear likningssystem! Kan i huske hvordan man gøre det? Med radoperasjoner få vi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & -4 \\ -1 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & h \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & h-8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & h-5 \end{array} \right).$$

Vi har omskrivet likningssystem som

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ h-5 \end{pmatrix}.$$

Den sidste likning hedder $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = h - 5$ og det kan kun være sant hvis $h = 5$. Ellers har likningssystemet ingen løsninger og $\overrightarrow{y}$ ligger ikke i spannet av $\overrightarrow{y}_1$, $\overrightarrow{y}_2$ og $\overrightarrow{y}_3$.

Hvis $h = 5$, så har likninssystemet unendlig mange løsninger (siden siste søyle er ikke en pivotsøyle). $\square$