EGENVEKTORER OG LINEÆR TRANSFORMASJONER (SEC. 5.4)

I sidste uke har vi oppbygget teorien av egenverdier og egenvektorer for matriser, dvs. for lineær transformasjoner fra vektorrommet $\mathbb{R}^n$ til sig selv. Nu skal vi utvikle teorien for generalle vektorrom. I næste uke kommer vi til at se hvordan denne generalle teorie kan anvendes til differensjal likninger. Vi starter med en definisjon:

Definisjon. *La $T : V \to V$ være en lineær transformasjon på et vektorrom V. En* egenvektor *til T er en $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$ i V slik at*

$$T(\overrightarrow{x}) = \lambda \overrightarrow{x},$$

for et tall λ som kalles en egenverdi*.*

La oss se på et eksempel:

Eksempel.

(1) La $V = C^\infty(\mathbb{R})$ være vektorrommet av *glatte funksjoner*, dvs. funsksjoner dersom de høyere ordens derverte $\overrightarrow{f}^{(k)}$ for $k = 0, 1, 2, \ldots$ eksisterer og er kontinuerlige. Differensjal operatoren $D : V \to V$ med

$$(D\overrightarrow{f})(t) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{f}(t),$$

er en lineær transformasjon på V. Hva er egenverdier og egenvektorer til D?

Efter definisjonen er en egenvektor en vektor $\overrightarrow{f} \neq \overrightarrow{0}$ slik at

$$(D\overrightarrow{f})(t) = \overrightarrow{f}'(t) = \lambda \overrightarrow{f}(t),$$

for alle $t \in \mathbb{R}$. Fra kalkulus ved vi at løsningen av denne differensjal likning er alle $\overrightarrow{f} \in V$ av formen

$$\overrightarrow{f}(t) = Ce^{\lambda t},$$

for en konstante $C \in \mathbb{R}$ og med $\lambda \in \mathbb{R}$. Vi konkluderer at alle tall $\lambda \in \mathbb{R}$ er egenverdier for differensjal operatoren $D : V \to V$ for $V = C^\infty(\mathbb{R})$ og at funksjonerne $\overrightarrow{f}(t) = Ce^{\lambda t}$ er egenvektorer.

(2) Husk at en lineær transformasjon ikke eksisterer i et vakuum. Det er altid viktigt at huske på hvilken vektorrom den er definert. For eksempel kan vi definer differensjal operatoren $D_{\text{poly}} : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ på polynomierommet $\mathbb{P}_2$ av alle polynomier med grad mindre enn 2. Spesifisk ha vi

$$D_{\text{poly}}\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right) = a_1 + 2a_2 t.$$

Det er en annen operator enn operatoren D fra den sidste eksempel! Hva er egenvektorer og egenverdier for D_{poly}? Vi kan ikke bruke eksponensjal funksjonen fra den sidste eksempel fordi den er ikke et polynom! Efter definisjonen ha vi bruk for et polynom $\overrightarrow{p}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ og et tall λ slik at

$$D_{\text{poly}}\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right) = a_1 + 2a_2 t = \lambda\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right) = \lambda a_0 + \lambda a_1 t + \lambda a_2 t^2,$$

for alle $t \in \mathbb{R}$. Vi har set før at $\{1, t, t^2\}$ er en basis for vektorrommet $\mathbb{P}_2$ og at representasjonen av en vektor i enhvert basis er unike. Derfor kan den sidste likning kun være sant for alle $t \in \mathbb{R}$ hvis

$$\begin{aligned} a_1 &= \lambda a_0 \\ 2a_2 &= \lambda a_1 \\ 0 &= \lambda a_2. \end{aligned}$$

La oss skrive disse likninger i matrix form:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Vi ser at egenvektorer og egenverdier for transformasjonen D_{poly} (i standardbasisen) kan finnes med at finne egenvektorer og egenverdier for matrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Spesifisk konkluderer vi at D_{poly} har kun egenverdien $\lambda = 0$ med egenvektorer $\overrightarrow{p}(t) = a_0$ for $a_0 \in \mathbb{R}$.

Den sidste eksempel illustrerer to ting:

- Hvert lineær transformasjon er definert på et bestemt vektorrom. Det giver ikke nogen mening at snakke om en lineær transformasjon uten at definere vektorrommet hvor den er definert. Særlig fysikerne er kent for at glemme det nogen gang og det kan medfør problemer.
- Vi kan finne egenvektorer og egenverdier for lineær transformasjoner på endeligdimensjonal vektorrom med at valge en basis for vektorrommet og representære transformasjoner som matriser. I den næste avsnit kommer vi til at utdybe det vider.

Matrisen til en lineær transformasjon. La V være et n-dimensjonalt vektorrom og valg en basis

$$\mathcal{B} = \{\overrightarrow{b}_1, \dots, \overrightarrow{b}_n\}$$

for V. Hvert $\overrightarrow{x} \in V$ kan skrives *unikt* som en lineær kombinasjon

$$\overrightarrow{x} = r_1 \overrightarrow{b}_1 + \cdots + r_n \overrightarrow{b}_n,$$

og vi har *koordinatevektoren*

$$[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}.$$

For hvert lineær transformasjon $T : V \to V$ har vi

$$T(\overrightarrow{x}) = r_1 T(\overrightarrow{b}_1) + \cdots + r_n T(\overrightarrow{b}_n).$$

Nu kan vi bruke koordinateavbildningen igen og fordi den er lineær finner vi

$$[T(\overrightarrow{x})]_{\mathcal{B}} = r_1 \left[T(\overrightarrow{b}_1)\right]_{\mathcal{B}} + \cdots + \left[r_n T(\overrightarrow{b}_n)\right]_{\mathcal{B}}.$$

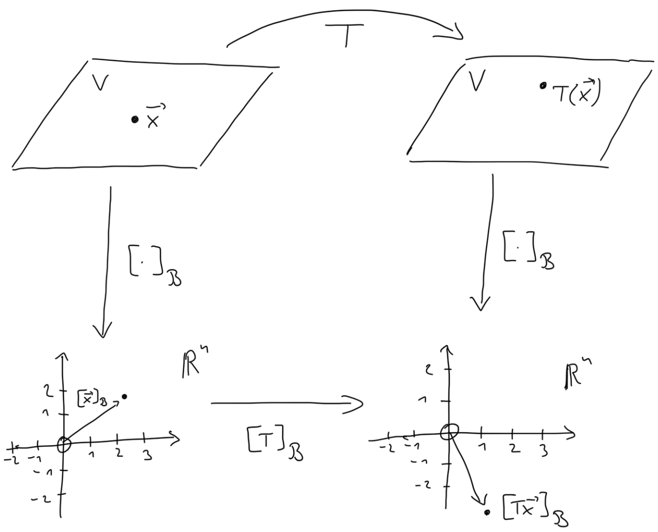
Det er en matriselikning! Hvis vi definerer matrisen

$$[T]_{\mathcal{B}} = \left(\left[T(\overrightarrow{b}_1)\right]_{\mathcal{B}}, \dots, \left[T(\overrightarrow{b}_n)\right]_{\mathcal{B}}\right), \tag{1}$$

med koordinatevektorer $\left[T(\overrightarrow{b}_j)\right]_{\mathcal{B}}$ som søyler, så kan (1) skrives som

$$[T(\overrightarrow{x})]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}} [\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}}.$$

Matrisen $[T]_{\mathcal{B}}$ kalles *matrisen til T med hensyn på $\mathcal{B}$*.



FIGUR 1. Matrisen til en lineær transformasjon med hensyn på en basis.

La oss se på eksempler:

Eksempel.

(1) Vi kan se igen på eksemplen fra før: Hvis vi ta lineær transformasjonen $D_{\text{poly}} : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ på polynomierommet $\mathbb{P}_2$ og standard basisen $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ så kan vi regne ut hvordan D_{poly} virker på basisvektorer. Vi finner at

$$D_{\text{poly}}(1) = 0$$
$$D_{\text{poly}}(t) = 1$$
$$D_{\text{poly}}(t^2) = 2t.$$

Koordinatevektorer (med hensyn på basisen $\mathcal{B}$) av disse polynomier er

$$[D_{\text{poly}}(1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [D_{\text{poly}}(t)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left[D_{\text{poly}}(t^2)\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

og vi finner

$$[D_{\text{poly}}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

som er den sammen matrise som vi har set før. Hvis vi ta polynomiet $\overrightarrow{p}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ så finner vi koordinatevektoren

$$[\overrightarrow{p}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

og

$$[D_{\text{poly}}]_{\mathcal{B}} \, [\overrightarrow{p}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 0 \end{pmatrix} = [D_{\text{poly}} \overrightarrow{p}]_{\mathcal{B}},$$

som er koordinatevektoren for

$$(D_{\text{poly}} \overrightarrow{p})(t) = a_1 + 2a_2 t.$$

(2) Anta at $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2\}$ er en basis for vektorrommet V og at $T : V \to V$ er en lineær transformasjon slik at

$$T\left(\overrightarrow{b}_1\right) = 3\overrightarrow{b}_1 - 2\overrightarrow{b}_2 \quad \text{and} \quad T\left(\overrightarrow{b}_2\right) = 4\overrightarrow{b}_1 + 7\overrightarrow{b}_2.$$

Hva er matrisen $[T]_{\mathcal{B}}$? Igen regner vi ut at

$$\left[T\left(\overrightarrow{b}_1\right)\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \left[T\left(\overrightarrow{b}_2\right)\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Vi finner at

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Like som i den første eksempel kan vi bruke matrisen til en lineær transformasjon med hensyn på en basis for at regne ut egenverdier og egenvektorer. Generalt har vi det efterfølgende teorem:

Teorem. *La $T : V \to V$ være en lineær transformasjon på et n-dimensjonalt vektorrom V med en basis $\mathcal{B}$. Vi har:*

(1) Et tall λ er en egenverdi til T hvis og kun hvis λ er en egenverdi til $[T]_{\mathcal{B}}$.
(2) En vektor $\overrightarrow{x} \in V$ er en egenvektor til T hvis og kun hvis $[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}}$ er en egenvektor til $[T]_{\mathcal{B}}$.

Bevis. Vi har

$$T(\overrightarrow{x}) = \lambda\overrightarrow{x}$$

hvis og kun hvis

$$[T]_{\mathcal{B}}\,[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}} = \lambda\,[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}},$$

fordi koordinateavbildningen og T er lineær. Fordi koordinatevektorer til en vektor er unike kan vi konkludere teoremet. □

La oss se på et annet eksempel fra kalkulus:

Eksempel.

(1) Vi definerer en lineær transformasjon $I : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ så at

$$(I\overrightarrow{p})(t) = \frac{1}{t}\int_0^t p(s)\mathrm{d}s.$$

Hva er egenvektorer og egenverdier for I? Er transformasjonen I overhoved definert på $\mathbb{P}_2$? Dvs. er $I\overrightarrow{p} \in \mathbb{P}_2$ for hvert polynom $\overrightarrow{p} \in \mathbb{P}_2$. Vi kan regne ut hva transformasjonen laver med vektorer i standard basisen $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ for $\mathbb{P}_2$. La oss kalle basisvektorer $\overrightarrow{p}_0(t) = 1$, $\overrightarrow{p}_1(t) = t$ og $\overrightarrow{p}_2(t) = t^2$. Vi finner at

$$(I\overrightarrow{p}_0)(t) = \frac{1}{t}\int_0^t 1\mathrm{d}s = \frac{1}{t}\left(s\Big|_0^t\right) = \frac{t}{t} = 1,$$

and

$$(I\overrightarrow{p}_1)(t) = \frac{1}{t}\int_0^t s\mathrm{d}s = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{2}s^2\Big|_0^t\right) = \frac{\frac{1}{2}t^2}{t} = \frac{1}{2}t,$$

and

$$(I\overrightarrow{p}_2)(t) = \frac{1}{t}\int_0^t s^2\mathrm{d}s = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{3}s^3\Big|_0^t\right) = \frac{\frac{1}{3}t^3}{t} = \frac{1}{3}t^2.$$

Det viser at $I\overrightarrow{p} \in \mathbb{P}_2$ for hvert polynom $\overrightarrow{p} \in \mathbb{P}_2$ fordi vi kan representære hvert polynom $\overrightarrow{p} \in \mathbb{P}_2$ i standardbasisen og vektorerne fra standardbasisen lander i $\mathbb{P}_2$ under I. Det er nemt at se at

$$[I\overrightarrow{p}_0]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [I\overrightarrow{p}_1]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [I\overrightarrow{p}_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix},$$

og at

$$[I]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Vi kan læse av at egenverdier er $1, 1/2$ og $1/3$ og at basisvektorer $\overrightarrow{p}_0$, $\overrightarrow{p}_2$ og $\overrightarrow{p}_3$ er egenvektorer.

(2) For et mere anvansert eksempel kan vi ta lineære transformasjon $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ som er definert som summen $T = D_{\text{poly}} + I$. Fordi koordinateavbildninger er lineær finner vi at

$$[T]_{\mathcal{B}} = [D_{\text{poly}} + I]_{\mathcal{B}} = [D_{\text{poly}}]_{\mathcal{B}} + [I]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 2 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Vi kan nemt se at egenverdier til denne lineær transformasjon er igen $1, 1/2$ og $1/3$ fordi matrisen til T med hensyn til basisen $\mathcal{B}$ er triangulært. Det ville være vansklig at regne egenverdier ut uten transformasjonsmatrisen.

Lineær transformasjoner på $\mathbb{R}^n$. Til sidst er det hjælpsom at komme tilbake til vektorrommet $\mathbb{R}^n$ og lineær transformasjoner $\overrightarrow{x} \mapsto A\overrightarrow{x}$ for en $n \times n$ matrise A. Noen ganger kan det være godt at bruke en annen basis til at representære så en transformasjon. Et viktigt eksempel finner vi i efterfølgende teoremet som sætter diagonalisering av matriser i et nyt lys.

Teorem 8 (Diagonale matrise representasjon)**.** *Anta at $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ er lineære transformasjonen $T_A(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x}$ for en $n \times n$ matrise A. Hvis $A = PDP^{-1}$ hvor D er en diagonal matrise og hvis $\mathcal{B}$ er basisen for $\mathbb{R}^n$ som består av søylerne i P så har vi*

$$[T_A]_{\mathcal{B}} = D.$$

Bevis. La $\overrightarrow{b}_1, \dots, \overrightarrow{b}_n$ være søyler i P så at $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{b}_1, \dots, \overrightarrow{b}_n\}$. Med notasjonen fra Sektion 4 ser vi at P er like med koordinateskiftematrisen $P_{\mathcal{B}}$ som skifter fra basis $\mathcal{B}$ til standardbasisen, dvs. slik at

$$P_{\mathcal{B}}\,[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}} = [\overrightarrow{x}]_{\mathcal{E}} = \overrightarrow{x}$$

for hvert $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$. Husk at vi har også

$$[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}}^{-1}\overrightarrow{x}.$$

Nu finner vi at

$$\begin{aligned} [T_A]_{\mathcal{B}} &= \left([T_A(\overrightarrow{b}_1)]_{\mathcal{B}}, \dots, [T_A(\overrightarrow{b}_n)]_{\mathcal{B}}\right) \\ &= \left([A\overrightarrow{b}_1]_{\mathcal{B}}, \dots, [A\overrightarrow{b}_n]_{\mathcal{B}}\right) \\ &= \left(P^{-1}A\overrightarrow{b}_1, \dots, P^{-1}A\overrightarrow{b}_n\right) \\ &= P^{-1}A\left(\overrightarrow{b}_1, \dots, P^{-1}A\overrightarrow{b}_n\right) \\ &= P^{-1}AP. \end{aligned}$$

Fordi $P^{-1}AP = D$ finner vi at $[T_A]_{\mathcal{B}} = D$. □

La oss se på et eksempel:

Eksempel. Definere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som $T(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x}$ med

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finne en basis $\mathcal{B}$ for $\mathbb{R}^2$ sådan at matrisen $[T]_{\mathcal{B}}$ er diagonal. Vi har set før at $A = PDP^{-1}$ for

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

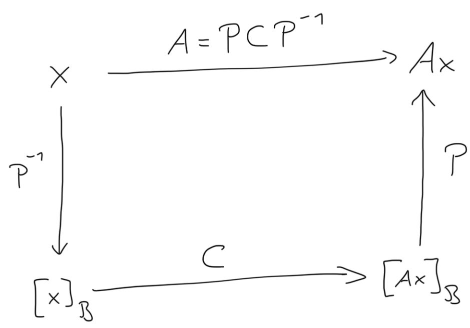
Vi kan læse av at

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

er en basis for $\mathbb{R}^2$ sådan at $[T]_{\mathcal{B}} = D$.

Similaritæt og basisskift. Beviset av Teorem 8 har ikke brukt at D er en diagonal matrise. La oss nu se på den generelle tilfald: Hvis $n \times n$ matriser A og C er similær finnes der en invertibel matrise P sådan at $A = PCP^{-1}$. Vi kan nu definere en basis $\mathcal{B}$ med at ta alle søyler fra matrisen P (det giver en basis efter resultater fra Sektion 4). Beviset av Teorem 8 viser nu at C er matrisen til den lineære transformasjon $\overrightarrow{x} \mapsto A\overrightarrow{x}$ med hensyn på basisen $\mathcal{B}$. Omvendt gælder at hvert matrise C som representærer den lineære transformasjon $\overrightarrow{x} \mapsto A\overrightarrow{x}$ med hensyn på en basis $\mathcal{B}$ er similært til A. Det viser den efterfølgende teorem:

Teorem. *Mængden av alle $n \times n$ matriser som er similært til en matrise A er det sammen som mængden av alle matriser som representærer den lineære transformasjon $\overrightarrow{x} \mapsto A\overrightarrow{x}$ i en basis $\mathcal{B}$.*



FIGUR 2. Similaritæt og basisskift.