KOMPLEKSE EGENVERDIER (SEC. 5.5)

Vi har set før at løsninger λ til den karakteristiske likning

$$\det(A - \lambda I_n) = 0,$$

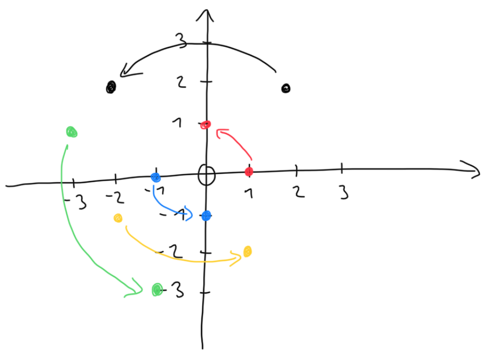
er egenverdier for $n \times n$ matrisen A. Den karakteristiske likning er en polynomlikning og der er eksempler hvor den ikke har reelle løsninger. For eksempel kan vi ta matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

hvor karakteristiske likning er

$$\lambda^2 + 1 = 0. \tag{1}$$

Denne likning har ingen reelle løsninger, og det giver meget mening hvis vi visualiserer lineære transformasjon $\overrightarrow{x} \mapsto A\overrightarrow{x}$ på $\mathbb{R}^2$ som roterer planen 90 grad imod klokken (se Fig. 1). Denne transformasjon har ingen egenvektor i $\mathbb{R}^2$ fordi der finnes ikke nogen retning hvor transformasjonen bare skalerer vektorer!



Figur 1. Transformasjonen med matrisen A.

Men (1) har komplekse løsninger $\lambda = i$ og $\lambda = -i$ (husk at i er den imaginære enheten definert sådan at $i^2 = -1$). Hvis vi definerer en transformasjonen $\overrightarrow{x} \mapsto A\overrightarrow{x}$ for $\overrightarrow{x} \in \mathbb{C}^2$, dvs. den komplekse vektorommet av vektorer med 2 komplekse indganger, så finner vi også komplekse egenvektorer. For eksempel har vi

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix},$$

og

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Det viser at

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \text{ og } \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix},$$

er egenvektorer til egenverdier i og $-i$. Vi starter med en generelle definisjon:

Definisjon. *En (komplekse)* egenvektor *til en* $n \times n$ *matrise* A *er en vektor* $\vec{x} \neq \vec{0}$ *i* $\mathbb{C}^n$ *slik at*

$$A\vec{x} = \lambda \vec{x},$$

for et (komplekse) tall λ *som kalles en* egenverdi *for* A.

Teorien for komplekse egenverdier og vektorer er analog til teorien vi har set før. For eksempel har vi de følgende resultater:

- Komplekse egenverdier er løsninger til karakteristiske likningen.
- Egenvektorer til forskjellige egenverdier er lineær uavhengig (hvor vi kan også ta lineær kombinasjoner med komplekse koeffisienter).
- En $n \times n$ matrise er komplekst diagonaliserbar hvis og kun hvis der finnes en basis for $\mathbb{C}^n$ som består av egenvektorer.
- En $n \times n$ matrise med forskjellige egenverdier er komplekst diagonaliserbar.
- Geometriske multiplisitet (dimensjonen av egenrommet, dvs. antall av (komplekse) vektorer i en basis til egenrommet) for en (komplekst) egenverdi er altid mindre eller like algebraiske multiplisitet av den sammen egenverdi.

Fordi vi fokusserer mest på reelle vektorrom i MAT1120 vil vi ikke gå dyber ind i den generelle teori av komplekse egenverdier og egenvektorer. I stedet vil vi prøve at forstår komplekse egenverdier for reelle matriser og hvordan de hænger sammen med rotasjoner. La oss se på et eksempel:

Eksempel. La

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{pmatrix}.$$

Finne egenverdier og en basis til hvert egenrom for A. For at finne egenverdier for A løser vi karakteristiske likningen

$$\det \begin{pmatrix} 0.5 - \lambda & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1.6\lambda + 1 = 0.$$

Med løsningsformlen til kvadratiske likninger finner vi løsninger

$$\lambda_1 = 0.8 - 0.6i$$
$$\lambda_2 = 0.8 + 0.6i.$$

Observere at egenverdierne er konjugater av hverandre, dvs. $\overline{\lambda_1} = \lambda_2$. For at finne egenvektorer til egenverdien λ_1 skal vi løse likningssystemet

$$\begin{pmatrix} 0.5 - \lambda_1 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.3 + 0.6i & -0.6 \\ 0.75 & 0.3 + 0.6i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lay boken har en trick for at løse likningssystemet, men det er ikke so vanskelig at radredusere det direkte (hvis man kan regne lidt med komplekse tall). Strategien er at lave den høyer-nederste tall reell med den tredje binomiske formel. Vi gør efterfølgende reduksjoner

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -0.3 + 0.6i & -0.6 \\ 0.75 & 0.3 + 0.6i \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} -0.3 + 0.6i & -0.6 \\ 0.75 \cdot (-0.3 + 0.6i) & (0.3 + 0.6i)(-0.3 + 0.6i) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -0.3 + 0.6i & -0.6 \\ 0.75 \cdot (-0.3 + 0.6i) & -0.45 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} -0.3 + 0.6i & -0.6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 - 2i & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

hvor vi har brukt at $0.75 \cdot 0.6 = 0.45$ og at $(10/3) \cdot (-0.3 + 0.6i) = 1 - 2i$ og $(10/3) \cdot (-0.6) = 2$ i sidste skrit. Vi kan valge x_1 som frie variabel og vi ser at nullrommet er utspennt av vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1-2i}{2} \end{pmatrix}.$$

For at gøre det lidt pæner kan vi gange vektoren med $-2(1 + 2i)$ og bruke tredje binomiske formel igen. Så ser vi at

$$\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 - 4i \\ 5 \end{pmatrix}$$

utspenner egenrommet til egenverdien $\lambda_1 = 0.8 - 0.6i$. Skal vi nu gøre det hele igen for egenverdien λ_2? Det har vi ikke bruk for! Fordi egenvektoren $\overrightarrow{v}_1$ oppfylder likningen

$$\begin{pmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 - 4i \\ 5 \end{pmatrix} = (0.8 - 0.6i) \begin{pmatrix} -2 - 4i \\ 5 \end{pmatrix},$$

kan vi konjugere det hele og får

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 + 4i \\ 5 \end{pmatrix} &= \overline{\begin{pmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 - 4i \\ 5 \end{pmatrix}} \\ &= \overline{(0.8 - 0.6i) \begin{pmatrix} -2 - 4i \\ 5 \end{pmatrix}} = (0.8 + 0.6i) \begin{pmatrix} -2 + 4i \\ 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Det viser at

$$\overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 + 4i \\ 5 \end{pmatrix},$$

er en egenvektor til egenverdien $\lambda_2 = 0.8 + 0.6i$. Det var nemt!

Fra eksemplen lærer vi et generelt teorem:

Teorem. *Hvis en reell $n \times n$ matrise A har en egenvektor $\overrightarrow{v}$ til egenverdi λ, så er den konjugerte vektor $\overline{\overrightarrow{v}}$ også en egenvektor og det er en egenvektor til egenverdi $\overline{\lambda}$.*

Bevis. Efter definisjon har vi

$$A\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v},$$

og hvis vi konjugerer likningen så ser vi at

$$A\overline{\overrightarrow{v}} = \overline{A\overrightarrow{v}} = \overline{\lambda\overrightarrow{v}} = \overline{\lambda}\,\overline{\overrightarrow{v}}.$$

Det viser at $\overline{\overrightarrow{v}}$ er egenvektor til egenverdi $\overline{\lambda}$. □

Teoremet viser at komplekse egenverdier for reelle matriser kommer i konjugerte par! Hvordan transformerer 2×2 matriser med komplekse egenverdier planet? Vi kan se igjen på eksemplen fra før:

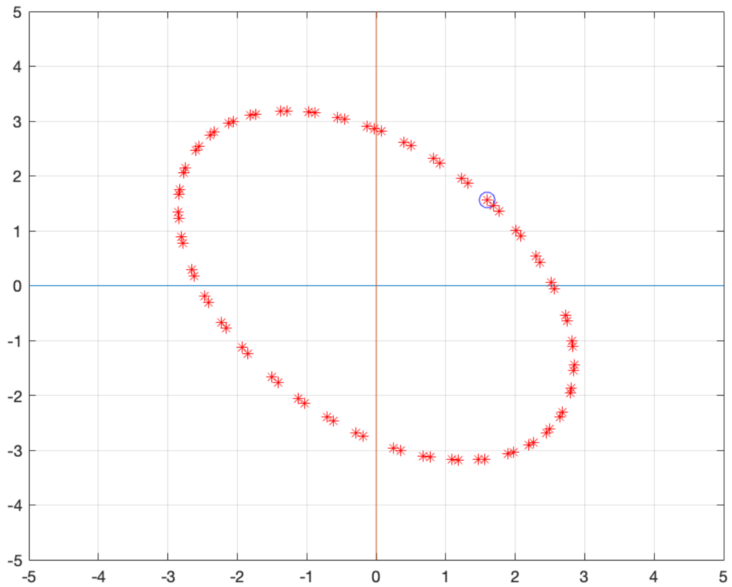
Eksempel. La oss igen ta matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{pmatrix}.$$

Hvordan transformerer A planet? For hvert startvektor $\overrightarrow{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ kan vi plotte vektorer $\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2, \ldots$ slik at

$$A\overrightarrow{x}_{k-1} = \overrightarrow{x}_k.$$

Det kan man nemt gør med Matlab (se code på hjemmesiden). Et typisk billed for en tilfaldig startvektor kan dere se i Fig. 2. Når man iterativt multipliserer med A så beveger sig vektoren på et elliptisk orbit. Hvordan oppstår denne rotasjonsbevegelse?



FIGUR 2. Iterativt multiplikasjon med A for startvektor i blå sirkel.

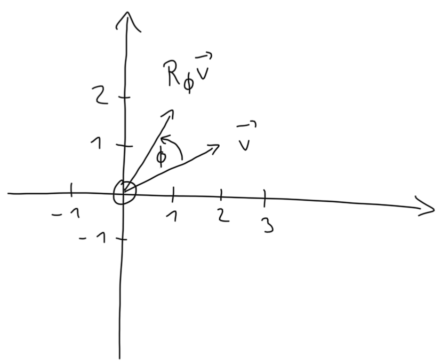
Rotasjonsmatriser. For at forstår hvordan rotasjonen oppstår er det instruktiv at se på rotasjonsmatriser og deres egenverdier og egenvektorer.

Definisjon. *For* $0 \leq \phi \leq 2\pi$ *kalles matrisen*

$$R_\phi = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix},$$

den rotasjonsmatrise *med vinkel* ϕ*.*

Hvorfor kalles matrisen for rotasjonsmatrisen? Fordi den roterer planet med vinkel ϕ (Se Fig. 3)!



FIGUR 3. Rotasjonsmatrisen.

Hva er egenverdier for en generalt rotasjons matrise? Vi kunne regne ut karakteristiske likningen men vi kan også være lidt smart. Hvis vi husker polarformen av komplekse tall, dvs. likningen

$$e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi),$$

så kan vi komme på ideen at prøve vektoren

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix},$$

som kunne være en egenvektor. Vi kan sjekke at

$$R_\phi \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) - i\sin(\phi) \\ \sin(\phi) + i\cos(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \\ ie^{-i\phi} \end{pmatrix} = e^{-i\phi}\overrightarrow{x}.$$

Det viser at $\overrightarrow{x}$ er virklig en egenvektor til hvert rotasjonsmatrise R_ϕ, og at $\lambda = e^{-i\phi}$ er en egenverdi. Teoremet som vi har vist før sier nu at

$$\overline{\overrightarrow{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

er også en egenvektor og at den tilhører til egenverdien $\overline{\lambda} = e^{i\phi}$. Nu har vi det efterfølgende teorem:

Teorem 9. *Rotasjonsmatrisen*

$$R_\phi = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix},$$

har eigenverdier

$$\lambda_1 = e^{-i\phi} \quad \textit{og} \quad \lambda_2 = e^{+i\phi},$$

og vi har $R_\phi = QD_\phi Q^{-1}$ for diagonal matrisen

$$D_\phi = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix},$$

og den invertible matrise

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}.$$

Bevis. Vi har allerede set at egenverdier er $\lambda_1 = e^{-i\phi}$ og $\lambda_2 = e^{+i\phi}$ og vi kan nemt sjekke at Q er invertibel med inverse

$$Q^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

For at vise at $R_\phi = QD_\phi Q^{-1}$ kan vi sjekke at

$$R_\phi Q = R_\phi \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1e^{-i\phi} & 1e^{+i\phi} \\ ie^{-i\phi} & -ie^{+i\phi} \end{pmatrix}$$

som er det sammen som

$$QD_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1e^{-i\phi} & 1e^{+i\phi} \\ ie^{-i\phi} & -ie^{+i\phi} \end{pmatrix}.$$

Det viser teoremet. □

Reelle matriser med komplekse egenverdier og rotasjoner. Hvordan finner vi rotasjonen i en reelle 2×2 matrise A med komplekse egenverdier? La oss se på eksemplen fra før:

Eksempel. La
$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{pmatrix},$$
og vi har set at egenvektorer til A er
$$\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} -2-4i \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} -2+4i \\ 5 \end{pmatrix}.$$
som tilhører til egenverdier
$$\lambda_1 = 0.8 - 0.6i$$
$$\lambda_2 = 0.8 + 0.6i.$$
La oss skrive egenverdier i polar form! Det er nemt fordi vi har
$$0.8^2 + 0.6^2 = 1.$$
Vi anta at $0 \leq \phi \leq 2\pi$ er slik at
$$0.8 - 0.6i = e^{-i\phi},$$
dvs. sådan at
$$\cos(\phi) = 0.8 \quad \text{og} \quad \sin(\phi) = 0.6.$$
Vi kan regne ut at
$$\phi = \arccos\left(\frac{0.8}{r}\right).$$
men de præsise verdi av ϕ er ikke viktigt her! Det er bar viktigt at vi kan diagonalisere matrisen A. Like som før sætter vi
$$D_\phi = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} & 0 \\ 0 & e^{+i\phi} \end{pmatrix},$$
og vi definerer også matrisen
$$S = \begin{pmatrix} -2-4i & -2+4i \\ 5 & 5 \end{pmatrix},$$
med egenvektorer for A som søyler. Vi kan sjekke at S er inverterbar (det skal det også være fordi egenvektorer til forskjellige egenverdier er lineær uavhengig), og at vi har $A = SDS^{-1}$ (det er diagonalisering av A!). Hvordan finner vi rotasjonen i matrisen A? Husk hva vi har lært om rotasjoner. Vi kan skrive
$$D_\phi = Q^{-1} R_\phi Q,$$
med rotasjonsmatrisen
$$R_\phi = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix},$$
og
$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix},$$
fra før. Hvis vi sætter det hele sammen ser vi at
$$A = SD_\phi S^{-1} = SD_\phi S^{-1} = SQ^{-1} R_\phi Q S^{-1},$$
og vi finner at A er similær til rotasjonsmatrisen R_ϕ! Vi kan skrive det lidt bedre fordi vi har
$$R_\phi = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix},$$

og

$$SQ^{-1} = \begin{pmatrix} -2-4i & -2+4i \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi ser til sidst at vi ikke har haft bruk for at kende ϕ, fordi vi kan skrive A som

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}^{-1},$$

med en rotatsjonsmatrise

$$\begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix}$$

som innholder real- og imaginærdeler av egenverdier λ_1 og λ_2 og en invertibel matrise

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

som har real- og imaginærdeler av egenvektorer som søyler.

Eksemplen illustrerer et generalt teorem:

Teorem 10. *La A være en reell 2×2 matrise med egenverdi $\lambda = a - bi$ for $b \neq 0$ og la $\overrightarrow{v}$ være en egenvektor til λ. Da er $A = PCP^{-1}$ med*

$$P = (Re(\overrightarrow{v}), Im(\overrightarrow{v})) \quad \text{og} \quad C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Der er en lille forskjell mellom den sidste eksempel og teoremet. I teoremet er matrisen

$$C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ikke nødvendigvis en rotasjonsmatrise. Hvis vi skriver egenverdien λ i polarform så har vi generellt at

$$\lambda = a - bi = re^{-i\phi},$$

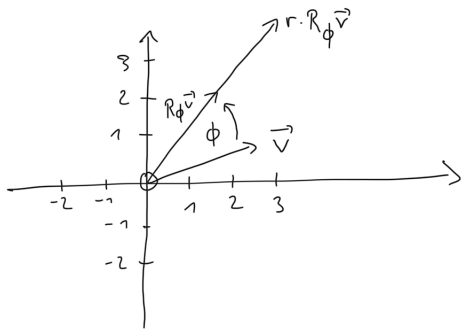
for en vinkel ϕ og et tall $r \geq 0$. Vi ser at

$$a = r\cos(\phi) \quad \text{og} \quad b = r\sin(\phi),$$

slik at

$$C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\phi) & -r\sin(\phi) \\ r\sin(\phi) & r\cos(\phi) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} = rR_\phi.$$

Det er en skalerte rotasjonsmatrise som først roterer planet og efter det skalerer vektorer med r (se Fig. 4).



FIGUR 4. Rotasjonsmatrisen.

Bevis. Vi følger samme trinn som i eksemplen før. Anta at

$$\lambda = a - ib = re^{-i\phi},$$

er en komplekse egenverdi for A som vi har skrivet i polarform for et $r \in \mathbb{R}$ og $0 \leq \phi \leq 2\pi$ som er ikke $0, \pi$ eller 2π (fordi $b \neq 0$). Husk at det betyder at

$$a = r\cos(\phi) \quad \text{og} \quad b = r\sin(\phi).$$

Anta også at den korresponderende egenvektor er

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{x} + i\overrightarrow{y},$$

for reelle vektorer

$$\mathrm{Re}\,(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{x} \quad \text{og} \quad \mathrm{Im}\,(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{y}.$$

Fra teoremet efter den første eksempel har vi at $\overline{\lambda}$ er den annen egenverdi for A og at tilhørende egenvektor er $\overline{\overrightarrow{v}} = \overrightarrow{x} - i\overrightarrow{y}$. Definer en diagonal matrise

$$D = \begin{pmatrix} re^{-i\phi} & 0 \\ 0 & re^{+i\phi} \end{pmatrix},$$

og en matrise

$$S = \left(\overrightarrow{v}, \overline{\overrightarrow{v}}\right).$$

Fordi egenverdier λ og $\overline{\lambda}$ er forskjellig (fordi $b \neq 0$) finner vi at S er invertibel og at

$$A = SDS^{-1}.$$

Som i eksempel ser vi at

$$D = rD_\phi = rQ^{-1}R_\phi Q,$$

og vi finner at

$$A = rSQ^{-1}R_\phi QS^{-1}.$$

Til sidst regner vi ut at

$$rR_\phi = \begin{pmatrix} r\cos(\phi) & -r\sin(\phi) \\ r\sin(\phi) & r\cos(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = C,$$

og at

$$SQ^{-1} = \left(\overrightarrow{v}, \overline{\overrightarrow{v}}\right) \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{v} + \overline{\overrightarrow{v}}\right), \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{v} - \overline{\overrightarrow{v}}\right)\right) = \left(\mathrm{Re}\,(\overrightarrow{v})\,, \mathrm{Im}\,(\overrightarrow{v})\right) = P,$$

og vi ser at $A = PCP^{-1}$.

$\square$