5.6 Diskrete dynamiske systemer

Eksempel 1

Start $t = 0$

$\#$ ugler : u_0

$\#$ rotter : r_0 (målt i tusind)

$\Big\}$ starttilstand: $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$

Til tiden k (målt i måneder):

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} u_k \\ r_k \end{pmatrix}$$

Systemets dynamik:

$$u_{k+1} = 0.5\, u_k + 0.4\, r_k$$

$$r_{k+1} = -p\, u_k + 1.1\, r_k$$

hvor $p > 0$.

På matrix-form: $\vec{x}_{k+1} = A\vec{x}_k$, hvor

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 \\ -p & 1.1 \end{pmatrix}$$

Egenværdier:

$$(0.5-\lambda)(1.1-\lambda) + 0.4p$$

$$= \lambda^2 - 1.6\lambda + 0.55 + 0.4p$$

$$\lambda = 0.8 \pm \sqrt{0.09 - 0.4p}$$

For $p = 0.104$:

$$\lambda_1 = 1.02 \quad \text{og} \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 0.58 \quad \text{og} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hvis $\vec{x}_0 = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2$ med $c_1 > 0$ så er

$$\vec{x}_k = c_1 (1.02)^k \vec{v}_1 + \underbrace{c_2 (0.58)^k \vec{v}_2}_{\to 0 \text{ for } k \to \infty} \approx c_1 (1.02)^k \vec{v}_1$$

Her vil populationen af ugler og rotter vokse med 2% hver måned.

Bemærk:

$$\frac{u_k}{r_k} \approx \frac{c_1 (1.02)^k \cdot 10}{c_1 (1.02)^k \cdot 13} = \frac{10}{13}$$

Forholdet mellem antal ugler og antal rotter er altså nogenlunde konstant.

Pr ugle er der $\frac{13}{10} \cdot 1000 = 1300$ rotter

Diskret dynamisk system:

Lad A være en $n \times n$-matrice.

Givet en starttilstand $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ beskrives udviklingen i tidsenheder k ved ligningen

$$\vec{x}_{k+1} = A\vec{x}_k$$

Antag at A er diagonaliserbar

så har vi n lineært uafhængige egenvektorer

$$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$$

med tilhørende egenværdier

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n$$

Bemærk at $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ er en basis for $\mathbb{R}^n$

Skriv $\vec{x}_0$ mht. basen $\mathcal{B}$:

$$\vec{x}_0 = c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_n \vec{v}_n$$

Så er

$$\vec{x}_1 = A\vec{x}_0 = c_1 A\vec{v}_1 + \dots + c_n A\vec{v}_n$$

$$= c_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + c_n \lambda_n \vec{v}_n$$

$$\vec{x}_2 = A\vec{x}_1$$

$$= c_1 \lambda_1^2 \vec{v}_1 + \dots + c_n \lambda_n^2 \vec{v}_n$$

$$\vec{x}_k = c_1 \lambda_1^k \vec{v}_1 + \dots + c_n \lambda_n^k \vec{v}_n$$

Egendekompositionen af $\vec{x}_0$ giver en nem måde at beskrive systemets dynamik!

For $p = 0.2$ (sultne ugler):

$\lambda_1 = 0.9$, $\lambda_2 = 0.7$

Hvis $\vec{x}_0 = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2$ så er

$$\vec{x}_k = c_1 (0.9)^k \vec{v}_1 + c_2 (0.7)^k \vec{v}_2 \to 0$$

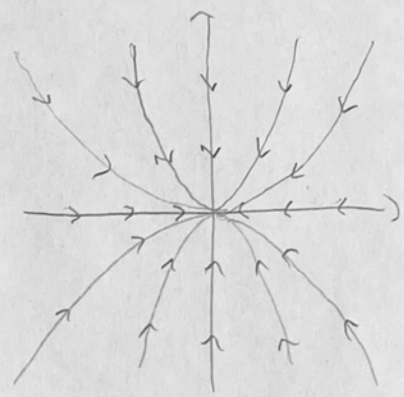
Rotterne bliver altså overspist!
Både populationen af rotter og af ugler kommer til at forsvinde ☹.

Vi har allerede nu fået en fornemmelse for at dynamiske systemer kan opføre sig meget forskelligt og at størrelserne på matricens egenværdier har afgørende betydning.

Lad os prøve at få greb om hvilke muligheder (kvalitativt) der er for hvordan et dynamisk system på $\mathbb{R}^2$ kan opføre sig.

<u>Eksempel 2a</u>

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.64 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} |\lambda_1| < 1 \\ |\lambda_2| < 1 \end{matrix}$$



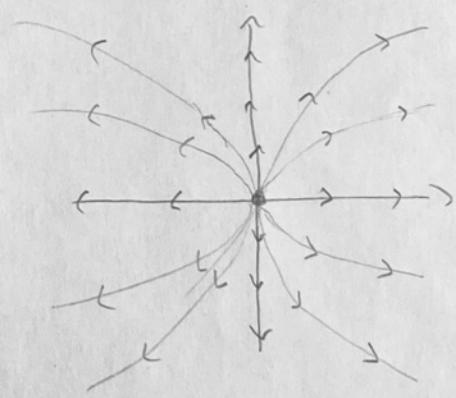
$$\vec{x}_k = c_1 (0.8)^k \vec{e}_1 + c_2 (0.64)^k \vec{e}_2 \to \vec{0}$$

Alle starttilstande konvergerer mod $\vec{0}$.
Vi siger at systemet er <u>stabilt</u>,
og at $\vec{0}$ er et <u>tiltrækkende fikspunkt</u>

Bemærk at tiltrækningen går lidt hurtigere langs y-aksen end langs x-aksen.

<u>Eksempel 2b</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1.44 & 0 \\ 0 & 1.2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} |\lambda_1| > 1 \\ |\lambda_1| > 1 \end{matrix}$$

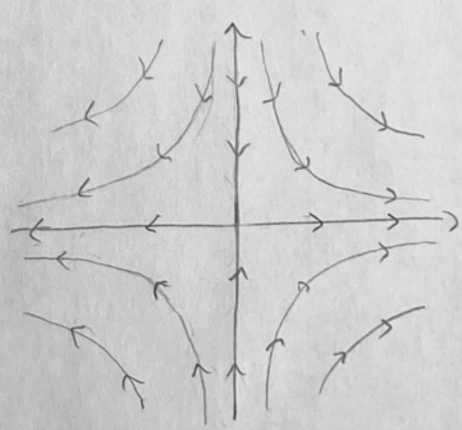


$$\vec{x}_k = c_1 (1.44)^k \vec{e}_1 + c_2 (1.2)^k \vec{e}_2$$

Hvis $\vec{x}_0 \neq \vec{0}$ vil $\vec{x}_k \to \infty$
Vi siger at systemet er <u>ustabilt</u>,
og at $\vec{0}$ er et <u>frastødende fikspunkt</u>.

<u>Eksempel 2c</u>

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} |\lambda_1| > 1 \\ |\lambda_2| < 1 \end{matrix}$$



$$\vec{x}_k = \underbrace{c_1 2^k \vec{e}_1}_{\to \infty} + \underbrace{c_2 (0.5)^k \vec{e}_2}_{\to \vec{0}}$$

<u>Opgave</u>: Er der flere kvalitative muligheder når
A er en reel og diagonal 2x2-matrice?

Afkobling

I eksempel 2 er A i alle 3 tilfælde på formen

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad \text{Egenvektorer } \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Skriv, for hvert k, $\vec{x}_k = \begin{pmatrix} x_k^{(1)} \\ x_k^{(2)} \end{pmatrix}$. Så er

$$x_{k+1}^{(1)} = \lambda_1 x_k^{(1)}$$
$$x_{k+1}^{(2)} = \lambda_2 x_k^{(2)}$$

Bemærk at den j'te koordinat i $\vec{x}_{k+1}$ kun afhænger af den j'te koordinat i $\vec{x}_k$. Koordinaterne er altså ikke koblet til hinanden.

Men ikke alle matricer er diagonale!

For en generel reel 2×2-matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

har vi

$$x_{k+1}^{(1)} = a x_k^{(1)} + b x_k^{(2)}$$
$$x_{k+1}^{(2)} = c x_k^{(1)} + d x_k^{(2)}$$

Hvis, f.eks. $b \neq 0$ afhænger $x_{k+1}^{(1)}$ ikke kun af $x_k^{(1)}$ men også af $x_k^{(2)}$. Tilsvarende hvis $c \neq 0$. Koordinaterne er i så fald koblede til hinanden. Hvordan kan dynamikken til et sådant system se ud?

Antag at A er en diagonaliserbar $n\times n$-matrice. Lad $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ være en egenbasis for A. Så er $A = PDP^{-1}$ hvor

$P = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ basisskiftmatricen $\mathcal{B} \to \mathcal{E}$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$ hvor λ_j er egenværdien for $\vec{v}_j$

Indsætter vi dette i det dynamiske system ser vi at

$$\vec{x}_{k+1} = A\vec{x}_k = (PDP^{-1})\vec{x}_k$$

Gang med P^{-1} fra venstre:

$$P^{-1}\vec{x}_{k+1} = \cancel{P^{-1}P}DP^{-1}\vec{x}_k = D(P^{-1}\vec{x}_k)$$

For hvert k, sæt $\vec{y}_k = P^{-1}\vec{x}_k$. Da er

$$\vec{y}_{k+1} = D\vec{y}_k$$

Vi har afkoblet det dynamiske system!

$$\begin{tikzcd} \vec{x}_k \arrow[r, mapsto, "A"] \arrow[d, mapsto, "P^{-1}"'] & \vec{x}_{k+1} \\ \vec{y}_k \arrow[r, mapsto, "D"] & \vec{y}_{k+1} \arrow[u, mapsto, "P"'] \end{tikzcd}$$

Bemærk: P er basisskiftmatricen $\mathcal{B} \to \mathcal{E}$

Altså er

$$\vec{y}_k = [\vec{x}_k]_{\mathcal{B}}$$
$$D = [T_A]_{\mathcal{B}}$$

I egenbasen for A er systemet afkoblet.

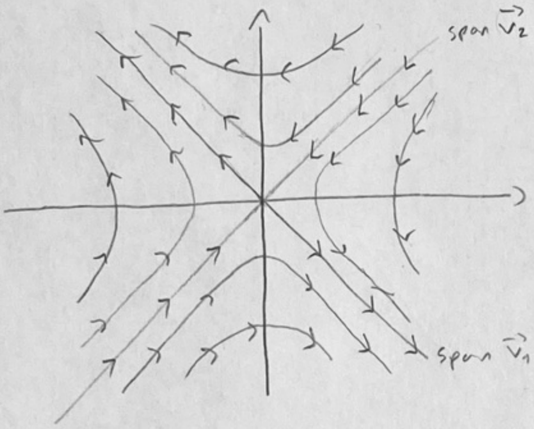
Eksempel 3

$$A = \begin{pmatrix} 1.25 & -0.75 \\ -0.75 & 1.25 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 2, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = 0.5, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hvis $\vec{x}_0 = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2$ så er

$$\vec{x}_k = c_1 2^k \vec{v}_1 + c_2 \cdot 0.5^k \vec{v}_2$$

Det ligner det dynamiske system fra eksempel 2.c men med $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$ i stedet for standardbasisvektorenne.



Komplekse egenvaerdier

Eksempel 4

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{3}{4} A$$

Egenvaerdier og vektorer for A:

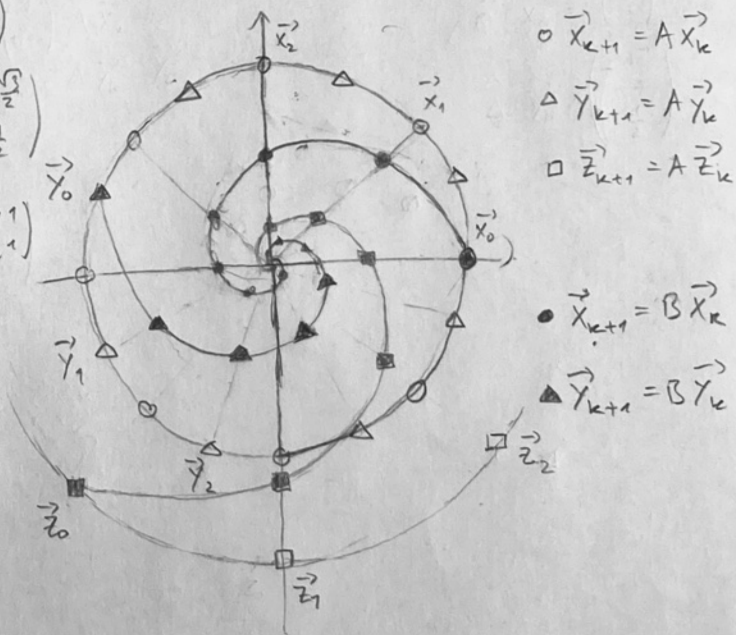
$$\lambda_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}_0 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{z}_0 = -\frac{3}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Eksempel 5

I forelæsning 11 så vi på matricen:

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{pmatrix}$$

Vi fandt egenværdier og egenvektorer

$$\lambda_1 = 0.8 - 0.6i, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1+2i \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 0.8 + 0.6i, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1-2i \end{pmatrix}$$

Bemærk at $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$

Lad $\phi \in [0, 2\pi)$ være sådan at

$$\cos\phi = 0.8 \quad \text{og} \quad \sin\phi = 0.6$$

altså så $\lambda_1 = \cos\phi - i\sin\phi$.
(Vi kan regne ud at $\phi \approx \frac{\pi}{5}$)

Betragt rotationsmatricen

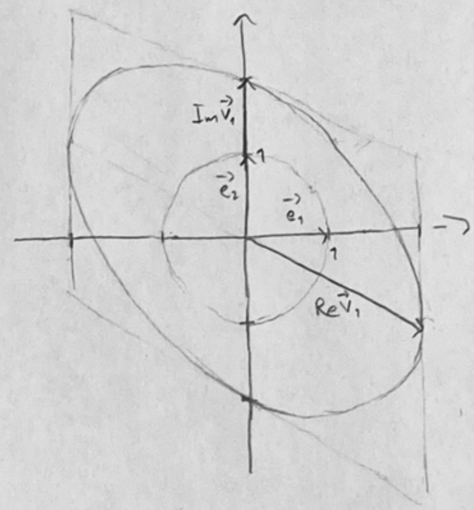
$$R_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

Det dynamiske system $\vec{y}_{k+1} = R_\phi \vec{y}_k$ ligner meget systemet fra eksempel 4 - bare med en anden vinkel.

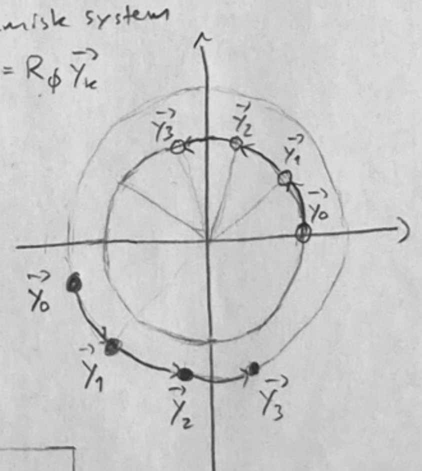
Vi så at vektorerne $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots$ som opfylder

$$\vec{x}_{k+1} = A\vec{x}_k$$

for en given startvektor $\vec{x}_0$ ligger på en ellipse



Dynamiske system
$\vec{y}_{k+1} = R_\phi \vec{y}_k$



> **Teorem 10** [forelæsning 11]:
> A reel 2x2-matrice.
> Egenværdi: $\lambda = a - ib$, $b \neq 0$, med tilhørende egenvektor $\vec{v}$.
> Da er $A = PCP^{-1}$ med
> $$P = (\mathrm{Re}\,\vec{v}, \mathrm{Im}\,\vec{v}) \quad \text{og} \quad C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Vi anvender Teorem 10 med A, λ_1 og $\vec{v}_1$. Da er

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad C = R_\phi$$

Videre, hvis vi sætter $\vec{y}_k = P^{-1}\vec{x}_k$, for hvert k, så er

$$\vec{y}_{k+1} = P^{-1}\vec{x}_{k+1} = P^{-1}A\vec{x}_k = P^{-1}(PR_\phi P^{-1})\vec{x}_k = R_\phi \vec{y}_k$$

Dette dynamiske system kender vi!
For at komme tilbage til det dynamiske system $\vec{x}_{k+1} = A\vec{x}_k$ applicerer vi P:

$$\vec{x}_{k+1} = P\vec{y}_{k+1}$$

Bemærk at P er basisskiftmatricen

$$\{\mathrm{Re}\,\vec{v}_1, \mathrm{Im}\,\vec{v}_1\} \longrightarrow \mathcal{E}$$

Altså er

$$\vec{y}_k = [\vec{x}_k]_\mathcal{B}$$

$$R_\phi = [T_A]_\mathcal{B}$$

Oversættelsen mellem de to dynamiske systemer $\vec{x}_{k+1} = A\vec{x}_k$ og $\vec{y}_{k+1} = R_\phi\vec{y}_k$ er altså blot et basisskift.