ANVENDELSER PÅ DIFFERENSJALLIKNINGER (SEC. 5.7). DEL 1

I sidste forlæsning har vi set hvordan teorien av egenverdier kan hjælpe med at klassifisere diskrete dynamiske systemer. I denne forlæsning udvikler vi en lignende teori for lineære systemer av differensjallikninger. Hva mener vi med et lineær system av differensjallikninger? Anta at $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er deriverbare funksjoner, slik at

$$x_i : [0, \infty) \to \mathbb{R},$$

og slik at

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a_{11}x_1(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) &= a_{21}x_1(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= a_{n1}x_1(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t), \end{aligned}$$

for alle $t \geq 0$. Vi kan skrive systemet lidt bedre hvis vi bruker *vektorvaluerte funksjoner*

$$\overrightarrow{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{x}'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix},$$

og matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Systemet kan nu skrives som

$$\overrightarrow{x}'(t) = A\overrightarrow{x}(t), \tag{1}$$

for alle $t \geq 0$. Vi kaller en vektorvaluerte funksjonen $\overrightarrow{x}$ som oppfyller (1) for alle $t \geq 0$ en *løsning* til differensjallikningen. Nogen gang vil vi kun har løsninger $\overrightarrow{x}$ som oppfyller $\overrightarrow{x}(0) = \overrightarrow{x}_0$ for en vektor $\overrightarrow{x}_0$. I disse tillfælder kaller vi differensjallikningen (1) sammen med betingelsen $\overrightarrow{x}(0) = \overrightarrow{x}_0$ et *inisjalverdiproblem* med inisjalverdien $\overrightarrow{x}_0$.

Hvorfor kaller vi systemet (1) lineært? Anta at $\overrightarrow{x}$ og $\overrightarrow{y}$ er løsninger til differensjallikningen (1) og at c og d er skalarer. Så finner vi at

$$(c\overrightarrow{x} + d\overrightarrow{y})'(t) = c\overrightarrow{x}'(t) + d\overrightarrow{y}'(t) = cA\overrightarrow{x}(t) + dA\overrightarrow{y}(t) = A\left(c\overrightarrow{x}(t) + d\overrightarrow{y}(t)\right),$$

og vi konkluderer at funksjonen $c\overrightarrow{x}(t) + d\overrightarrow{y}(t)$ er også en løsning til differensjallikningen. Ingeniører sier også at en *superposisjon* av løsninger er en løsning. Det er klart at $\overrightarrow{x}(t) = \overrightarrow{0}$ er en løsning til differensjallikningen (1) og det betyder at rommet av alle løsninger til differensjallikningen (1) er en underrom av vektorrommet av de deriverbare vektorvaluerte funksjoner. Vi kan derfor bruke lineær algebra for at forstå løsninger til disse likninger!

Det viser sig at vektorrommet av løsninger til systemet $\overrightarrow{x}' = A\overrightarrow{x}$ for en $n \times n$ matrise A har dimensjon n. En basis til denne løsningsrom kalles et *fundamentalsett* av løsninger. Alle løsninger til $\overrightarrow{x}' = A\overrightarrow{x}$ kan skrives som lineærkombinasjoner av løsninger i et fundamentalsett! Det viser sig også at løsningen til den inisjalverdiproblem $\vec{x}' = A\vec{x}$ med $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ er altid unike.

Hvordan finner vi fundamentalsett til systemer av differensjallikninger? La oss se på et eksempel:

Eksempel. For

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix},$$

har vi differensjallikningssystem

$$\begin{pmatrix} \vec{x}'_1(t) \\ \vec{x}'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_1(t) \\ \vec{x}_2(t) \end{pmatrix},$$

som er ekvivalente til de to likninger

$$\vec{x}'_1(t) = 3\vec{x}_1(t)$$
$$\vec{x}'_2(t) = -5\vec{x}_2(t).$$

Det er nemt at løse denne system med kalkulus. Vi finner at

$$\vec{x}_1(t) = c_1 e^{3t}$$
$$\vec{x}_2(t) = c_2 e^{-5t},$$

og at hvert løsning kan skrives som

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{3t} \\ c_2 e^{-5t} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-5t}$$

Mængden $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-5t}\}$ er et fundamentalsett for systemet.

Eksemplen illustrerer at det er nemt at løse systemer av differensjallikninger som er *dekoplet*. Lige som den diskrete tillfæld kan vi bruke diagonalisering av matriser for at dekople systemer av differensjallikninger.

Decoupling. Hvis vi har et system av differensjallikninger som (1) med en $n \times n$ matrise A som er diagonaliserbar, så kan vi finne alle løsninger med at følge de følgende trinn:

(1) Diagonaliser matrisen A, dvs. finne en inverterbare matrise P sådan at $A = PDP^{-1}$ med diagonal matrisen

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Husk at $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ er egenverdier av A og $P = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ med tilsvarende egenvektorer $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ som søyler.

(2) Skifte variabler med

$$\vec{y}(t) = P^{-1}\vec{x}(t).$$

Vi kan sjekke at

$$\vec{y}'(t) = P^{-1}\vec{x}'(t) = P^{-1}A\vec{x}(t) = DP^{-1}\vec{x}(t) = D\vec{y}(t).$$

Vektorvaluerte funksjon $\vec{y}$ oppfyller differensjallikningssystem

$$\vec{y}'(t) = D\vec{y}(t), \qquad (*)$$

som er dekoplet fordi D er diagonal!

(3) Løs dekoplet differensjallikningssystem $(*)$. Det er nemt fordi den er jo bare systemet

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= \lambda_1 y_1(t), \\ y_2'(t) &= \lambda_2 y_2(t), \\ &\vdots \\ y_n'(t) &= \lambda_n y_n(t), \end{aligned}$$

med generelle løsninger

$$\begin{aligned} y_1(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t}, \\ y_2(t) &= c_2 e^{\lambda_2 t}, \\ &\vdots \\ y_n(t) &= c_n e^{\lambda_n t}. \end{aligned}$$

Vi kan skrive det mere kompakt som

$$\overrightarrow{y}(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

Fra formlen er det klart at

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \overrightarrow{y}(0) = P^{-1}\overrightarrow{x}(0),$$

som kan beregnes fra en inisjalverdi $\overrightarrow{x}(0) = \overrightarrow{x}_0$ til systemet.

(4) Til sidst kan vi transformere tilbake og finne

$$\begin{aligned} \overrightarrow{x}(t) &= P\overrightarrow{y}(t) \\ &= (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \dots, \overrightarrow{v}_n) \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \\ &= c_1 e^{\lambda_1 t}\overrightarrow{v}_1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}\overrightarrow{v}_n. \end{aligned}$$

Alle løsninger til systemet av differensjallikninger kan skrives på denne måde og funksjoner

$$e^{\lambda_i t}\overrightarrow{v}_i$$

former fundamentalsett til systemet. Disse funksjoner kalles også *egenfunksjoner* til systemet.

La oss formulere konklusjonen fra den sidste regning som et teorem:

Teorem. *La A være en diagonaliserbar $n \times n$ matrise med egenverdier $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ og tilsvarende lineær uavhengige eigenvektorer $\overrightarrow{v}_1, \dots \overrightarrow{v}_n$. Så har differensjallikningssystemet*

$$\overrightarrow{x}' = A\overrightarrow{x},$$

eigenfunksjoner

$$e^{\lambda_1 t}\overrightarrow{v}_1, \dots, e^{\lambda_n t}\overrightarrow{v}_n,$$

som former et fundamentalsett av løsninger og generelle løsninger kan skrives som

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}\vec{v}_n,$$

med tall $c_1, \ldots, c_n$. *Hvis inisjalverdien* $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ *er givet så er tallene* $c_1, \ldots, c_n$ *unike slik at*

$$\vec{x}_0 = c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n.$$

La oss se på et eksempel:

Eksempel. Finne alle løsninger til den inisjalverdiproblem

$$\vec{x}' = A\vec{x}, \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0,$$

med matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

og inisjalverdien

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2.9 \\ 2.6 \end{pmatrix}.$$

Vi kan finne egenverdier og egenvektorer for A. Vi har egenverdier $\lambda_1 = 6$ og $\lambda_2 = -1$ med tilsvarende egenvektorer

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi kan sjekke at egenvektorer er lineær uavhengig (egenverdier er jo også forskjellig) og vi konkluderer at matrisen A er diagonaliserbar. Efter teoremet har vi generelle løsninger

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2 = c_1 e^{6t}\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

for systemet $\vec{x}' = A\vec{x}$. Hva med inisjalverdien? Vi kan regne ut (løse lineær likningssystem) at

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2.9 \\ 2.6 \end{pmatrix} = -\frac{2}{70}\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{188}{70}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

og denne ekspansjon er unike. Vi konkluderer at

$$\vec{x}(t) = -\frac{2}{70}e^{6t}\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{188}{70}e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

er den unike løsning til inisjalverdiproblemet.

Eksponensjalfunksjon for matriser. Vi har set at ikke alle matriser er diagonaliserbar. Hvordan løser vi differensjallikningssystem $\vec{x}' = A\vec{x}$ for en matrise A som ikke er diagonaliserbar? Hvis vi ser på løsningen til differensjallikningen i den første eksempel (med en diagonal matrise A) så kunne man får ideen at evaluere eksponentsjalfunksjonen på en matrise. Det er den rigtige ide! Vi begynner med at definere med en definisjon:

Definisjon. *For en* $n \times n$ *matrise* A *og* $t \in \mathbb{R}$ *definerer vi*

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A^k = I_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A^k,$$

hvor vi har brukt konvensjonen at $A^0 = I_n$.

Definisjonen inneholder en potensrække med potenser av en $n \times n$ matrise. Vi kan tænke over denne række som følgen

$$\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{t^k}{k!} A^k\right)_{N \in \mathbb{N}},$$

dvs. følgen

$$I_n, I_n + tA, I_n + tA + \frac{t^2}{2}A^2, I_n + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \frac{t^3}{6}A^3, \ldots.$$

Elementer av denne følge er matriser og vi kan spørge om deres indganger konvergerer så at der finnes en matrise som vi kaller e^{tA} så at

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{t^k}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = e^{tA}.$$

Det skal vi vise nu:

Teorem. *For hvert $n \times n$ matrise A og $t \in \mathbb{R}$ rækken i definisjon av e^{tA} konvergerer, dvs. følgerne som står i indganger konvergerer allesammen. Vi konkluderer at e^{tA} er en veldefineret $n \times n$ matrise.*

Bevis. La oss kalle $a_{ij}^{(k)}$ den (i,j)-indgang a matrisen A^k og $a_{ij} = a_{ij}^1$ den (i,j)-indgang a matrisen $A = A^1$. Vi definerer

$$m_A = \max_{i,j} |a_{ij}|.$$

Vi kan expandere matriseprodukten og se at

$$a_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} a_{lj}^{(k-1)},$$

og derfor har vi

$$|a_{ij}^{(k)}| \le n m_A \max_{i,j} |a_{ij}^{(k-1)}|,$$

for hvert $k \ge 2$. Hvis vi bruker denne ulikhed rekursivt så finner vi at

$$|a_{ij}^{(k)}| \le n^{k-1} m_A^k,$$

for hvert $k \ge 1$ og vi har $|a_{ij}^{(0)}| \le 1$. Derfor har vi at

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} |a_{ij}^{(k)}| \le 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} n^{k-1} m_A^k = 1 + \frac{1}{n}\left(e^{tnm_A} - 1\right) < \infty,$$

og vi konkluderer at hvert indgang av rækken $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$ konvergerer. $\square$

Indgangerne $a_{ij}^{(k)}$ i den sidste bevis skal ikke forveksles med potenser a_{ij}^k. De er ikke det sammen! Generellt, er det ikke nemt at regne ut matriseeksponensjalfunksjonen. For eksempel gjælder der

$$e^{t\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}} \neq \begin{pmatrix} e^{ta_{11}} & e^{ta_{12}} \\ e^{ta_{21}} & e^{ta_{22}} \end{pmatrix}$$

for generelle 2×2 matriser (bortsett fra nogen særlige tillfalder).