ANVENDELSER PÅ DIFFERENSJALLIKNINGER (SEC. 5.7). DEL 2

Systemer av differensjallikninger med generelle matriser. Husk matrise-eksponensjalfunksjonen fra sidste gang:

Definisjon. *For en $n \times n$ matrise A og $t \in \mathbb{R}$ definerer vi*

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = I_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k,$$

hvor vi har brukt konvensjonen at $A^0 = I_n$.

Hvordan kan vi bruke matriseeksponentsjalfunksjonen for at løse den system $\overrightarrow{x}' = A\overrightarrow{x}$? For inisjalverdien $\overrightarrow{x}_0$ kan vi definere en vektorvaluerte funksjon

$$x(t) = e^{tA}\overrightarrow{x}_0,$$

og vi kan sjekke at

$$x(0) = e^{0 \cdot A}\overrightarrow{x}_0 = I_n\overrightarrow{x}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{0^k}{k!} A^k \overrightarrow{x}_0 = \overrightarrow{x}_0,$$

fordi hvert term i rækken forsvinder. Med en lille regning [1] kan vi også sjekke at

$$\begin{aligned}
x'(t) = \frac{d}{dt} e^{tA}\overrightarrow{x}_0 &= \frac{d}{dt}\left(I_n\overrightarrow{x}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \overrightarrow{x}_0 \right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \overrightarrow{x}_0 \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{t^k}{k!} \right) A^k \overrightarrow{x}_0 \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{t^{k-1}}{k!} A^k \overrightarrow{x}_0 \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^k \overrightarrow{x}_0 \\
&= A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^{k-1} \overrightarrow{x}_0 \\
&= A \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l}{l!} A^l \overrightarrow{x}_0 = Ae^{tA}\overrightarrow{x}_0 = Ax(t),
\end{aligned}$$

hvor vi har skiftet indeksen til $l = k - 1$. Det viser at funksjonen $x(t) = e^{tA}\overrightarrow{x}_0$ er en løsning til differensjallikningssystem $\overrightarrow{x}' = A\overrightarrow{x}$. La oss se på de eksempler fra før igen:

Eksempel.

[1] Regningen bruker at man kan bytte differensjaloperatoren og en uendlig summasjon. Det er ikke altid rigtigt at gøre det, men i den her tillfald er det ok. Grunden til det er at konvergensradius av eksponensjalrækken er uendlig.

(1) For matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix},$$

finner vi at

$$\begin{aligned} e^{tA} &= I_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \\ &= I_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & (-5)^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3t)^k}{k!} & 0 \\ 0 & 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-5t)^k}{k!} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Løsninger til differensjallikningen $\overrightarrow{x}' = A\overrightarrow{x}$ har formen

$$\begin{aligned} x(t) = e^{tA} x_0 &= \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-5t}, \end{aligned}$$

like som løsninger som vi har funnet før.

(2) For matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

kan vi bruke diagonaliseringen for at beregne matriseeksponensjalfunksjonen. Husk at $A = PDP^{-1}$ med diagonal matrisen

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

og den inverterbare matrise

$$P = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi kan nu regne ut at

$$\begin{aligned} e^{tA} &= I_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \\ &= PP^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (PDP^{-1})^k \\ &= P \left(I_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} D^k \right) P^{-1} \\ &= Pe^{tD} P^{-1}, \end{aligned}$$

hvor vi har brukt at $(PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1}$ like som vi har set før i Sektion 5.3. Vi konkluderer at

$$e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{6t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Hvis vi anvender denne matrise på inisjalvektoren

$$\overrightarrow{x}_0 = \begin{pmatrix} 2.9 \\ 2.6 \end{pmatrix},$$

så finner vi løsningen

$$\begin{aligned}\overrightarrow{x}(t) = e^{tA}\overrightarrow{x}_0 &= P\begin{pmatrix} e^{6t} & 0 \\ 0 & e^{-t}\end{pmatrix}P^{-1}\overrightarrow{x}_0 \\ &= -\frac{2}{70}e^{6t}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix} + \frac{188}{70}e^{-t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Det er igen den sammen løsning som vi har funnet før.

Eksemplen illustrerer den eferfølgende generelle teorem:

Teorem. *La A være en $n \times n$ matrise. Den unike løsning til inisjalverdi problemet $\overrightarrow{x}' = A\overrightarrow{x}$ med inisjalverdien $\overrightarrow{x}(0) = \overrightarrow{x}_0$ er*

$$\overrightarrow{x}(t) = e^{tA}\overrightarrow{x}_0.$$

Beviset til denne teorem baserer på at matrisen e^{tA} er inverterbar[2]. Søylerne i e^{tA} er en lineær uavhengige mængde av løsninger til systemet som former et fundamentalsett. Den fulle bevis går lidt for langt for vore kursus, men hvis dere går dyber i teorien av differensjallikninger så kommer dere at se det sener. Hvis dere ville lege med matriseeksponensjalfunksjonen så kan der bruke kommando

```
expm(B)
```

for at regne ut matriseeksponensjalfunksjonen av en matrise B i Matlab eller Octave.

Komplekse egenverdier. Til sidst kan vi tænke over den tillfald hvor matrisen A har nogen komplekse egenverdier. Anta at en reell $n \times n$ matrise A har komplekse egenverdier λ og $\overline{\lambda}$ (husk at komplekse egenverdier for reelle matriser kommer i konjugerte par) med eigenvektorer $\overrightarrow{v}$ og $\overline{\overrightarrow{v}}$. Vi kan skrive ned to løsninger til systemet $\overrightarrow{x}' = A\overrightarrow{x}$ som

$$\overrightarrow{x}_1(t) = e^{\lambda t}\overrightarrow{v}, \quad \text{og} \quad \overrightarrow{x}_2(t) = e^{\overline{\lambda}t}\overline{\overrightarrow{v}}.$$

Fordi

$$\overline{e^{\lambda t}} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k t^k}{k!}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\overline{\lambda}^k t^k}{k!} = e^{\overline{\lambda}t},$$

har vi $\overline{\overrightarrow{x}_1(t)} = \overrightarrow{x}_2(t)$. Vi har set før at løsninger til et system av differensjallikninger former et vektorrom. Derfor er

$$\mathrm{Re}\left(\overrightarrow{x}_1(t)\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{x}_1(t) + \overline{\overrightarrow{x}_1(t)}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{x}_1(t) + \overrightarrow{x}_2(t)\right)$$

og

$$\mathrm{Im}\left(\overrightarrow{x}_1(t)\right) = \frac{1}{2i}\left(\overrightarrow{x}_1(t) - \overline{\overrightarrow{x}_1(t)}\right) = \frac{1}{2i}\left(\overrightarrow{x}_1(t) - \overrightarrow{x}_2(t)\right)$$

også løsninger til systemet. Vi kan regne ut hvordan disse reelle funksjoner ser ut. La oss ta $\lambda = a + ib$ og husk

$$e^{ibt} = \cos(bt) + i\sin(bt).$$

Nu har vi

$$e^{\lambda t} = e^{at+ibt} = e^{at}e^{ibt} = e^{at}(\cos(bt) + i\sin(bt)),$$

og

$$\begin{aligned}\overrightarrow{x}_1(t) &= e^{\lambda t}\overrightarrow{v} \\ &= e^{at}(\cos(bt) + i\sin(bt))\left(\mathrm{Re}\left(\overrightarrow{v}\right) + i\mathrm{Im}\left(\overrightarrow{v}\right)\right) \\ &= e^{at}\left(\cos(bt)\mathrm{Re}\left(\overrightarrow{v}\right) - \sin(bt)\mathrm{Im}\left(\overrightarrow{v}\right) + i\left(\sin(bt)\mathrm{Re}\left(\overrightarrow{v}\right) + \cos(bt)\mathrm{Im}\left(\overrightarrow{v}\right)\right)\right)\end{aligned}$$

[2] I kan prøve at vise selv at e^{-tA} er den inverse matrise

Vi konkluderer at

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,(\overrightarrow{x}_1(t)) &= e^{at}(\cos(bt)\mathrm{Re}\,(\overrightarrow{v}) - \sin(bt)\mathrm{Im}\,(\overrightarrow{v}))\\ \mathrm{Im}\,(\overrightarrow{x}_1(t)) &= e^{at}\,(\sin(bt)\mathrm{Re}\,(\overrightarrow{v}) + \cos(bt)\mathrm{Im}\,(\overrightarrow{v}))\,.\end{aligned}$$

Man kan vise generellt at disse to løsninger er lineær uavhengig og man kan bruke dem for at finne et fundamentalsett av løsninger for $\overrightarrow{x}' = A\overrightarrow{x}$ hvis matrisen A er diagonaliserbar med komplekse egenverdier. Til sidst kan vi se på et eksempel av det:

Eksempel. La

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2.5 \\ 10 & -2 \end{pmatrix},$$

og

$$\overrightarrow{x}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Hvordan finner vi alle løsninger til inisjalverdiproblemet $\overrightarrow{x}' = A\overrightarrow{x}$ med inisjalverdien $\overrightarrow{x}(0) = \overrightarrow{x}_0$. Først kan vi regne ut at matrisen A har komplekse egenverdier $\lambda_1 = -2 + 5i$ og $\lambda_2 = -2 - 5i$. Vektoren

$$\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix}$$

er en egenvektor til egenverdien λ_1. Med metoden fra før kan vi finne komplekse egenfunksjoner

$$\overrightarrow{x}_1(t) = e^{-2+5i}\begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{og} \quad \overrightarrow{x}_1(t) = e^{-2-5i}\begin{pmatrix} -i \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Like som vi har diskutert før kan vi finne reelle løsninger med at ta real- og imaginærdel av funksjonen $\overrightarrow{x}_1$. Vi får løsninger

$$\overrightarrow{y}_1(t) = \mathrm{Re}\,(\overrightarrow{x}_1(t)) = e^{-2t}\begin{pmatrix} -\sin(5t) \\ 2\cos(5t) \end{pmatrix}$$

og

$$\overrightarrow{y}_2(t) = \mathrm{Im}\,(\overrightarrow{x}_1(t)) = e^{-2t}\begin{pmatrix} -\cos(5t) \\ 2\sin(5t) \end{pmatrix}.$$

Disse to funksjoner er lineær uavhengig og dermed former de et fundamentalsett. Generalle løsninger kan skrives som

$$\overrightarrow{x}(t) = c_1 e^{-2t}\begin{pmatrix} -\sin(5t) \\ 2\cos(5t) \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t}\begin{pmatrix} -\cos(5t) \\ 2\sin(5t) \end{pmatrix}.$$

For $t = 0$ har vi

$$\overrightarrow{x}(0) = c_1\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

For at har $\overrightarrow{x}(0) = \overrightarrow{x}_0$ skal vi valge $c_1 = 1.5$ og $c_2 = 3$. Det viser at

$$\overrightarrow{x}(t) = 1.5e^{-2t}\begin{pmatrix} -\sin(5t) \\ 2\cos(5t) \end{pmatrix} + 3e^{-2t}\begin{pmatrix} -\cos(5t) \\ 2\sin(5t) \end{pmatrix}$$

er løsningen til inisjalverdiproblemet.