FLERE DETALJER TIL KONVERGENS AV MARKOVKJEDER (SEC. 5.9)

Her kommer alle beviser som bliver oversprunget i forlæsningen. Det er ikke relevant til eksamen, men særlig studenter i matematik skulle prøve at forstår disse detaljer. Alle notasjon er like som i forlæsningen.

Lemma 1. *For hvert $n \times n$ matrise A og hvert vektor $\overrightarrow{y}$ med $\sum_{k=1}^{n} y_k = 0$ har vi*

$$\|A\overrightarrow{y}\|_1 \leq \frac{diam(A)}{2}\|\overrightarrow{y}\|_1.$$

Bevis. Det er klart at lemmaen holder hvis $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$. La $\overrightarrow{y} \neq \overrightarrow{0}$ og definere

$$I_+ = \{k \quad : \quad y_k \geq 0\} \quad \text{og} \quad I_- = \{k \quad : \quad y_k < 0\}.$$

Vi har

$$\|\overrightarrow{y}\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |y_k| = \sum_{k \in I_+} y_k + \sum_{k \in I_-} |y_k| = 2\sum_{k \in I_+} y_k,$$

fordi $\sum_{k \in I_+} y_k - \sum_{k \in I_-} |y_k| = \sum_{k=1}^{n} y_k = 0$. Vi kan regne ut at

$$\begin{aligned}
\|A\overrightarrow{y}\|_1 &= \sum_{k=1}^{n} |(A\overrightarrow{y})_k| \\
&= \sum_{k=1}^{n} |\sum_{j=1}^{n} A_{kj} y_j| \\
&= \sum_{k=1}^{n} |\sum_{j_1 \in I_+} A_{kj_1} y_{j_1} - \sum_{j_2 \in I_-} A_{kj_2} |y_{j_2}|| \\
&= \sum_{k=1}^{n} |\sum_{j_1 \in I_+} \alpha_{j_1} A_{kj_1} - \sum_{j_2 \in I_-} \beta_{j_2} A_{kj_2}| \left(\sum_{l \in I_+} y_l\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} |\sum_{j_1 \in I_+} \alpha_{j_1} A_{kj_1} - \sum_{j_2 \in I_-} \beta_{j_2} A_{kj_2}| \frac{\|\overrightarrow{y}\|_1}{2}
\end{aligned}$$

hvor vi har brukt at

$$\sum_{l \in I_+} y_l = \frac{\|\overrightarrow{y}\|_1}{2},$$

og hvor vi har introdusert

$$\alpha_{j_1} = \frac{y_{j_1}}{\sum_{l \in I_+} y_k} \quad \text{og} \quad \beta_{j_2} = \frac{|y_{j_2}|}{\sum_{l \in I_+} y_l}.$$

Tallene α_{j_1} og β_{j_2} er positiv og oppfyller

$$\sum_{j_1 \in I_+} \alpha_{j_1} = \sum_{j_2 \in I_-} \beta_{j_2} = 1.$$

Vi kan nu anvende trekantsuligheden på flere forskjellige måler og finne

$$
\begin{aligned}
\|A\vec{y}\|_1 &= \sum_{k=1}^{n} \Big| \sum_{j_1 \in I_+} \alpha_{j_1} A_{kj_1} - \sum_{j_2 \in I_-} \beta_{j_2} A_{kj_2} \Big| \frac{\|\vec{y}\|_1}{2} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \Big| \sum_{j_2 \in I_-} \beta_{j_2} \left(\sum_{j_1 \in I_+} \alpha_{j_1} A_{kj_1} - A_{kj_2} \right) \Big| \frac{\|\vec{y}\|_1}{2} \\
&\le \sum_{k=1}^{n} \sum_{j_2 \in I_-} \beta_{j_2} \Big| \sum_{j_1 \in I_+} \alpha_{j_1} A_{kj_1} - A_{kj_2} \Big| \frac{\|\vec{y}\|_1}{2} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j_2 \in I_-} \beta_{j_2} \Big| \sum_{j_1 \in I_+} \alpha_{j_1} \left(A_{kj_1} - A_{kj_2} \right) \Big| \frac{\|\vec{y}\|_1}{2} \\
&\le \sum_{k=1}^{n} \sum_{j_2 \in I_-} \sum_{j_1 \in I_+} \alpha_{j_1} \beta_{j_2} |A_{kj_1} - A_{kj_2}| \frac{\|\vec{y}\|_1}{2} \\
&= \sum_{j_2 \in I_-} \sum_{j_1 \in I_+} \alpha_{j_1} \beta_{j_2} \sum_{k=1}^{n} |A_{kj_1} - A_{kj_2}| \frac{\|\vec{y}\|_1}{2} \\
&\le \max_{j_1, j_2} \sum_{k=1}^{n} |A_{kj_1} - A_{kj_2}| \frac{\|\vec{y}\|_1}{2} \\
&= \max_{j_1, j_2} \|\vec{v}_{j_1} - \vec{v}_{j_2}\| \frac{\|\vec{y}\|_1}{2} \\
&= \frac{\operatorname{diam}(A)}{2} \|\vec{y}\|_1.
\end{aligned}
$$

Det viser lemmaen. □

Husk også den efterfølgende lemma fra forlæsningen:

Lemma 2. *For hvert stokastiske matrise P har vi diam$(P) \le 2$ og vi har diam$(P) < 2$ hvis alle indgangerne i P er strengt positiv.*

I forlæsningen har vi vist konvergens av Markovkjeder i denne spesialtillfald hvor stokastiske matrisen selv har kun strengt positive indganger. Her kan vi give den generelle bevis:

Teorem 11. *La P være en $n \times n$ regulær stokastisk matrise.*

(1) P har en unik *likevektsvektor $\vec{q}$.*

(2) For alle inisjaltilstander $\vec{x}_0$, så vil Markovkjeden

$$\vec{x}_{k+1} = P\vec{x}_k,$$

konvergere mot $\vec{q}$.

Bevis. La P være en $n \times n$ stokastiske matrise som er regulær og slik at P^k har kun strengt positive indganger og vi definerer

$$Q = P^k,$$

som er en stokastiske matrise med strengt positive indganger. Lemma 2 viser at

$$\kappa := \frac{\operatorname{diam}(Q)}{2} < 1,$$

Fordi stokastiske matriser bevarer summen av indganger i vektorer har vi

$$\sum_{i=1}^{n} (Q\vec{y})_i = 0,$$

hvis
$$\sum_{i=1}^{n} y_i = 0.$$
Derfor kan vi bruke Lemma 1 flere gang i træk og det viser at
$$\|Q^l \overrightarrow{y}\|_1 \leq \kappa^l \|\overrightarrow{y}\|_1,$$
for alle $\overrightarrow{y}$ slik at
$$\sum_{i=1}^{n} y_i = 0.$$
La oss nu anta at $\overrightarrow{q}$ er en likevektsvektor for P (der finnes altid så en vektor ifølge teoremet fra forlæsning). For hvert stokastisk vektor $\overrightarrow{x}_0$ finner vi at
$$\overrightarrow{y} = \overrightarrow{q} - \overrightarrow{x}_0$$
har indgangerne som summerer til 0 fordi ingangerne i $\overrightarrow{q}$ og i $\overrightarrow{x}_0$ summerer til 1. Husk den så kallte 'floor' funksjon
$$\lfloor x \rfloor = \text{Mindste heltall større en } x,$$
definert for hvert $x \in \mathbb{R}$. For hvert $m \in \mathbb{N}$ kan vi skrive
$$P^m = P^{m-k\lfloor m/k \rfloor} Q^{\lfloor m/k \rfloor}.$$
Det ser måske lidt vansklig ut, men det er det ikke. For eksempel kan vi ta $m = 10$ og $k = 4$ (slik at $\lfloor 10/4 \rfloor = \lfloor 2.5 \rfloor = 2$) og der sier det bar at
$$P^{10} = P^{10-4\lfloor 10/4 \rfloor} Q^{\lfloor 10/4 \rfloor} = P^{10-8} Q^2 = P^2 Q^2,$$
hvor $Q = P^4$. Det er bar en kompakt måde at skrive disse potenser som produkt av Qer og Per.

Lemma 2 viser at
$$\|\overrightarrow{q} - P\overrightarrow{x}\|_1 = \|P(\overrightarrow{q} - \overrightarrow{x})\|_1 \leq \|\overrightarrow{q} - \overrightarrow{x}\|_1,$$
og at
$$\|\overrightarrow{q} - Q\overrightarrow{x}\|_1 = \|Q(\overrightarrow{q} - \overrightarrow{x})\|_1 \leq \kappa \|\overrightarrow{q} - \overrightarrow{x}\|_1,$$
for likevektsvektoren $\overrightarrow{q}$ og hvert sannsynlighedsvektor $\overrightarrow{x}$ (husk at $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{q} - \overrightarrow{x}$ har indganger som summerer til 0). Hvis vi itererer disse to uligheder finner vi
$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{q} - \overrightarrow{x}_m\|_1 &= \|P^{m-k\lfloor m/k \rfloor} Q^{\lfloor m/k \rfloor} \left(\overrightarrow{q} - \overrightarrow{x}_0\right)\|_1 \\ &\leq \|Q^{\lfloor m/k \rfloor} \left(\overrightarrow{q} - \overrightarrow{x}_0\right)\|_1 = \|Q^{\lfloor m/k \rfloor} \overrightarrow{y}\|_1 \leq \kappa^{\lfloor m/k \rfloor} \|\overrightarrow{y}\|_1 \to 0,\end{aligned}$$
hvis $m \to \infty$. Vi konkluderer at $\overrightarrow{x}_m \to \overrightarrow{q}$ hvis $m \to \infty$. Til sidst kan vi vise at likehetsvektoren er unikt. Anta at $\overrightarrow{q'}$ er også en likevektsvektor for P. Efter den sidste del i beviset har vi $\overrightarrow{q'} = P^m \overrightarrow{q'} \to \overrightarrow{q}$ hvis $m \to \infty$. Men det betyder jo at $\overrightarrow{q'} = \overrightarrow{q}$ og vi har vist at der finnes kun en likevektsvektor til en regulær stokastiske matrise. $\square$