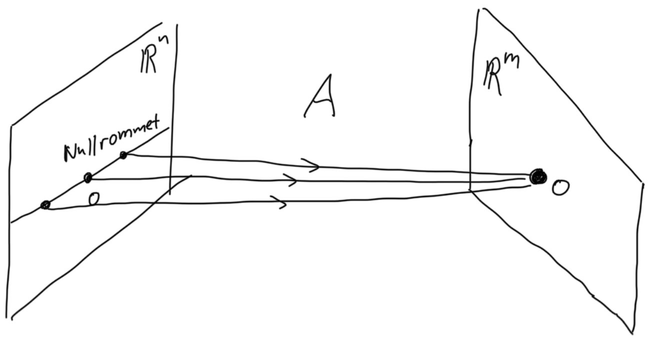
NULLROM, KOLONNEROM, RÆKKEROM OG LINEÆRE TRANSFORMASJONER (SEC. 4.2)

Nullrommet. Vektorrom og underrom oppstår naturligt i sammenhæng med matriser og lineære transformasjoner. Lad os starte med en definisjon:

Definisjon. *La A være en $m \times n$-matrise. Vi definer* nullrommet *som*

$$Nul(A) = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}\}.$$

Se Figure 1.



FIGUR 1. Nullrommet.

Nullrommet er løsningsrummet til et lineære likningssystem! Lad os se på et eksempel:

Eksempel. Nullrommet til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

er løsningsrummet av likningssystemet $A\overrightarrow{x} = 0$. For at løse det radreduser vi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hvilke vektorer $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ opfylder

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi ser at $x_1 = 0$ og $x_2 = -2x_3$. Derfor har vi

$$\overrightarrow{x} = x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

og vi har

$$\mathrm{Nul}\,(A) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

I eksemplen var nullrommet et underrom. Det er generalt sant:

Teorem 2. *Nullrommet til en $m \times n$ matrise A er et underrom av $\mathbb{R}^n$.*

Bevis. Det er klart at nullrommet av en $m \times n$ matrise A er et undermængde av $\mathbb{R}^n$ og det er også nemt at sjekke at $\overrightarrow{0} \in \mathrm{Nul}\,(A)$. Hvis nu $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathrm{Nul}(A)$ så kan vi sjekke at

$$A(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = A\overrightarrow{u} + A\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}.$$

og at

$$A(c\overrightarrow{u}) = c \cdot (A\overrightarrow{u}) = c \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}.$$

□

La os se igen (i et mere avansert eksempel) hvordan vi finder nullrommet til en matrise:

Eksempel. Hva er nullrommet av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix}?$$

Vi skal løse likningssystemet $A\overrightarrow{x} = 0$. Først radreduser vi matrisen

$$\begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hvilke vektorer $\overrightarrow{x}$ løser likningssystemet

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vi kan for eksempel skrive $x_1 = 2x_2 + x_4 - 3x_5$ og $x_3 = -2x_4 + 2x_5$ hvor x_2, x_4, x_5 er fri variabler. Et generalt løsning kan skrives som

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix},$$

for $x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$. Vi kan også skrive det som

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

og vi ser at

$$\mathrm{Nul}(A) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Søylerommet og radrommet. Der er et annet viktigt underom konstruert fra en matrise:

Definisjon. *For en $m \times n$-matrise A definerer vi* søylerommet $Col(A)$ *som denne vektorrom den består av alle lineærkombinasjoner av søyler i A. Hvis*

$$A = (\overrightarrow{a}_1, \ldots, \overrightarrow{a}_n),$$

med søyler $\overrightarrow{a}_1, \ldots, \overrightarrow{a}_n$ så er

$$Col(A) = span\{\overrightarrow{a}_1, \ldots, \overrightarrow{a}_n\}.$$

Søylerommet er spannet av søylerne i matrisen og derfor er det et underrom (efter Teorem 1):

Teorem 3. *Søylerommet til en $m \times n$ matrise er et underrom av $\mathbb{R}^m$.*

Alternativt kan vi skrive

$$\mathrm{Col}\,(A) = \{\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m \ : \ A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b} \text{ for nogen } \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n\},$$

fordi

$$A\overrightarrow{x} = (\overrightarrow{a}_1, \ldots, \overrightarrow{a}_n)\,\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{a}_1 + \cdots + x_n\overrightarrow{a}_n.$$

Derfor er søylerommet den underrom av alle vektorer $\overrightarrow{b}$ hvor likningssystemet $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ har en løsning.

Lige som søylerommet kan vi definer radrommet som er spannet av rader i en matrise:

Definisjon. Radrommet *av en matrise A er spannet av rader i A. Den betegnes $Row(A)$.*

Det er meget naturligt at skrive rader som radvektorer men man kan også skrive dem som søylevektorer. Med matrisetranspositionen har vi at $\mathrm{Row}(A) = \mathrm{Col}(A^T)$. Igen er det klart at radrommet er et underrom.

Lineære transformasjoner. Et sentralt emne i lineær algebra er hvordan vektorrom transformeres under nogen naturlige operasjoner med hensyn til vektorromsaksiomerne. Vi starter med en definisjon:

Definisjon. *En* lineæar transformasjon T *fra et vektorrom V til et vektorrom W er en regel som for hver $\overrightarrow{x} \in V$ tilordner en unik vektor $T(\overrightarrow{x})$ slik at*

(1) $T(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = T(\overrightarrow{u}) + T(\overrightarrow{v})$.
(2) $T(c \cdot \overrightarrow{u}) = cT(\overrightarrow{u})$.

Lad os se på nogen eksempler:

Eksempel.

(1) Et viktigt eksempel er transformasjoner $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ representert av matriser, dvs. $T(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x}$ for en $m \times n$ matrise A.
(2) For vektorrommet $\mathbb{P}_2$ av polynomier av grad mindre end 2 kan vi definere en lineære transformasjon $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ ved

$$T(\overrightarrow{p}) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{p}(0) \\ \overrightarrow{p}(0) \end{pmatrix}.$$

Hvis $\overrightarrow{p} = a + bx + cx^2$ så har vi

$$T(\overrightarrow{p}) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{p}(0) \\ \overrightarrow{p}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Det er lineært!

(3) Lad os tag to vektorrom av reelle funksjoner på et interval $[a, b]$:

$$V = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ deriverbare med kontinuert derivert}\},$$
$$W = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ kontinuert}\}.$$

Nu kan vi definere en lineære transformation $D : V \to W$ som differenserer funksjoner $D(f) = f'$. Den er lineært fordi

$$D(f + g) = (f + g)' = f' + g' = D(f) + D(g) \text{ og } D(c \cdot f) = cD(f),$$

for alle $c \in \mathbb{R}$.

For hvert lineære transformasjon kan vi definere to underrom:

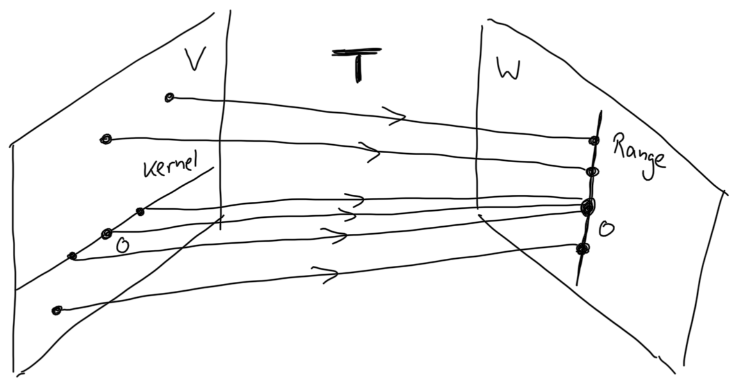
Definisjon (Kjerne og range)**.** *Hvis $T : V \to W$ så definerer vi* kjernen *til T som*

$$\textit{Kjerne}\,(T) = \{\overrightarrow{x} \in V \;\;:\;\; T(x) = 0\},$$

og range *til T som*

$$\textit{Range}\,(T) = \{T(\overrightarrow{x}) \;\;:\;\; \overrightarrow{x} \in V\}.$$

Se Figure 2.



FIGUR 2. Kjernet og range.

Hvad er kjerner og ranger av de eksempler vi har set før?

(1) Hvis lineære transformasjonen $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er representert av en matrise A, dvs. $T(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x}$, så er

$$\text{Kjerne}\,(T) = \text{Nul}(T) \quad \text{og} \quad \text{Range}(T) = \text{Col}(T).$$

(2) For lineære transformasjonen $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ ved

$$T(\overrightarrow{p}) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{p}(0) \\ \overrightarrow{p}(0) \end{pmatrix},$$

består kjernen av alle polynomier $\overrightarrow{p}(x) = a + bx + c^2$ med $\overrightarrow{p}(0) = 0$. Det er klart at $\overrightarrow{p}(0) = a$ og vi har

$$\text{Kjerne}\,(T) = \{bx + c^2x \;\;:\;\; b, c \in \mathbb{R}\}.$$

For at finde rangen tag vi et generalt polynom $\overrightarrow{p}(x) = a + bx + c^2$ og regner ud at

$$T(\overrightarrow{p}) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{p}(0) \\ \overrightarrow{p}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}.$$

Fordi $a \in \mathbb{R}$ kan valges frit så har vi

$$\text{Range}\,(T) = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ : \ a \in \mathbb{R} \right\} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

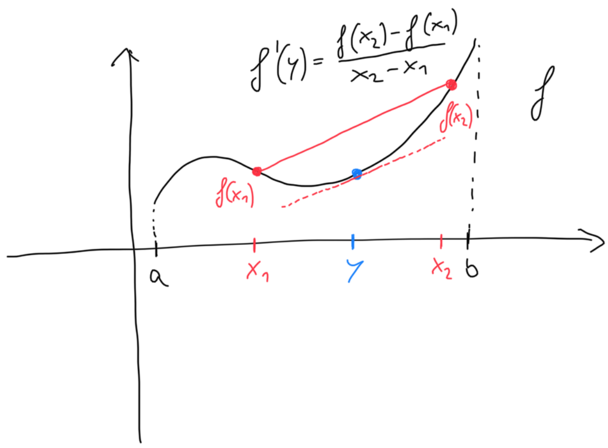
Denne eksempel viser at kjernet og rangen er meget forskjellige objekter og at de kan ligge i forskjellige vektorrom (Kjerne (T) består er polynomier i $\mathbb{P}_2$, men Range (T) består av vektorer i $\mathbb{R}^2$).

(3) I den sidste eksempel er lineære transformasjon den derivert $D : V \to W$ som differenserer funksjoner $D(f) = f'$. Hvad er kjernet av denne transformasjon? Efter definisjonen består den av alle funksjoner som opfyller $D(f) = f' = \overrightarrow{0}$, hvor $\overrightarrow{0}$ er nullfunksjonen i den vektorrommet W av alle kontinuert funksjoner. Med middelverdisetningen fra MAT1110 (se Figure 3) ved vi at kun konstante funksjoner $f \in V$ opfyller $f' = \overrightarrow{0}$. Derfor har vi

$$\text{Kjerne}\,(D) = \{ f \in V \ : \ f \text{ konstante} \}.$$

For at bestemme rangen husker vi igen fra MAT1110 at alle kontinuerte funksjoner på et interval $[a, b]$ har et antiderivert. Derfor har vi

$$\text{Range}\,(D) = W.$$



Figur 3. Middelverdisetningen

Til sidst kan vi se på et eksempel mere:

Eksempel. På signalrommet $\mathbb{S}$ av uendlige følger $(\ldots, y_{-1}, y_0, y_1, \ldots)$ definerer vi transformasjonen $M_2 : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ ved $M_2(\{y_n\}) = \left\{ \frac{y_n + y_{n-1}}{2} \right\}$. Vis at M_2 er lineær og finn kjernen:

For at vise at M_2 er lineær kan vi regne ud at

$$\begin{aligned} M_2\left(\{x_n\}+\{y_n\}\right) &= M_2\left(\{x_n+y_n\}\right) \\ &= \left\{\frac{(x_n+y_n)+(x_{n-1}+y_{n-1})}{2}\right\} \\ &= \left\{\frac{(x_n+x_{n-1})}{2}\right\}+\left\{\frac{(y_n+y_{n-1})}{2}\right\} \\ &= M_2(\{x_n\})+M_2(\{y_n\}). \end{aligned}$$

Det viser at M_2 er lineært! Nu vil vi bestemme kjernen til M_2. Følgen $\{y_n\}$ er i kjernen hvis

$$M_2\left(\{y_n\}\right)=\left\{\frac{y_n+y_{n-1}}{2}\right\}=(\ldots,0,0,0,\ldots),$$

dvs. hvis

$$\frac{y_n+y_{n-1}}{2}=0,$$

for hvert n. Det betyder at $y_n=-y_{n-1}$ for alle n. Vi kan vælge $y_0=a$ frit og dermed har vi

$$y_n=a(-1)^n$$

for alle n. Vi konkluderer at

$$\text{Kjerne}\left(M_2\right)=\Big\{(\ldots,-a,a,-a,a,-a,a,-a,\ldots)\ :\ a\in\mathbb{R}\Big\}.$$