LINEÆR UAVHÆNGIGE MÆNGDER, BASER (SEC. 4.3)

Lineær uavhængihed. Vi kommer nu til et sentralt konsept i lineær algebra:

Definisjon. *En mængde av vektorer* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ *i et vektorrommet* V *sies å være* lineært uavhengige *hvis likningen*

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 \cdots + c_p\vec{v}_p = \vec{0}, \qquad (*)$$

bare har den trivielle løsningen $c_1 = c_2 = \cdots = c_p = 0$. *Ellers sier vi at mængden* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ *er* lineært avhengige. *En relation* $(*)$ *kælles en* lineær avhengighetsrelation.

Vi kan først sjekke at vi har forstået definisjonen. Hvis $v \in V$ er et vektor, er mængden $\{\vec{v}\}$ lineær uavhængig? I fleste tilfælder ja. Mængden $\{\vec{v}\}$ er lineær uavhængig hvis og kun hvis $\vec{v} \neq \vec{0}$. For $v_1, v_2 \in V$ er $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ lineær avhængig hvis og kun hvis der findes et $c \in \mathbb{R}$ så at $\vec{v}_1 = c\vec{v}_2$. Lad os se på nogen mere avanserte eksempler:

Eksempel.

(1) Hvis $V = \mathbb{R}^n$ og $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\} \subset V$ så kan likningen

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 \cdots + c_p\vec{v}_p = \vec{0},$$

skrives som $A\vec{c} = \vec{0}$ for matrisen $A = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$ med vektorerne $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p$ som søyler og med

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix}.$$

Vi ser at $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ er lineært avhængige hvis og kun hvis linkningssystemet $A\vec{c} = \vec{0}$ har et ikke trivielt løsning. Alternativt er det tilfælled hvis og kun hvis Kjerne$(A) \neq \{\vec{0}\}$. Strategien for at vise det er at radredusere matrisen A (husk at lineær avhængighed a søyler er bevares ved radoperasjoner).

(2) Hvis $\vec{p}_1(t) = 1 - t^2$, $\vec{p}_2(t) = t - t^2$, og $\vec{p}_3(t) = 2 - t - t^2$ så er mængden $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3\}$ lineær afhængig fordi

$$\vec{p}_3 = 2\vec{p}_1 - \vec{p}_2.$$

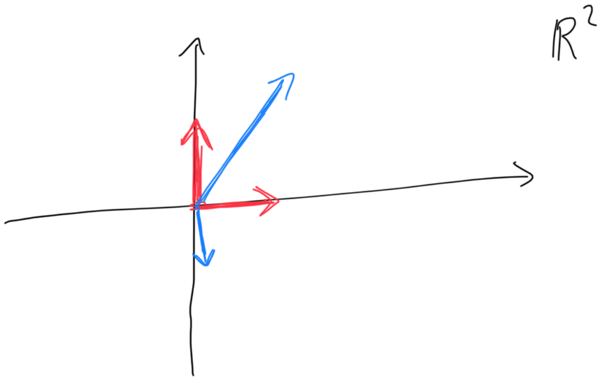
(3) Mængden $\{\sin(t), \cos(t)\}$ er lineær uavhængige i vektorrommet $C([0,1])$ a kontinuerte funksjoner på intervallet $[0,1]$. Der findes ingen $c \in \mathbb{R}$ så at $\sin(t) = c\cos(t)$ ($\tan(t) = \sin(t)/\cos(t)$ er ikke konstante!).

(4) Mængden $\{\sin(t)\cos(t), \sin(2t)\}$ i vektorrommet $C([0,1])$ er lineær avhængige fordi

$$\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t).$$

Definisjon. *La* H *være et underrom av et vektorrom* V. *Et mængde av vektorer* $\mathcal{B} \subseteq V$ *kælles en* basis *for* H *hvis*

(1) $\mathcal{B}$ *er lineært uavhengig.*
(2) $H = span(\mathcal{B})$.



FIGUR 1. To basis i $\mathbb{R}^2$.

Definisjonen også gælder hvis $H = V$ og en base for V er en mængde a lineær uavhengige vektorer som utspenner V. Bemærk også at mængden $\mathcal{B}$ i definisjonen altid ligger i H fordi $H = \operatorname{span}(\mathcal{B})$.

Eksempel.

(1) Mængden $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \dots, \overrightarrow{e}_n$ som er søyler av $n \times n$ identitætsmatrisen I_n er en basis for $\mathbb{R}^n$. Denne kaldes også *standard basen.*

(2) Mængden $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ er en basis for $\mathbb{R}^3$. Hvordan ser man det? Form matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

fra vektorerne. Den er på trappeform med pivoter i hvert rad og i hvert søyle. Vi ser at likningssystemet $A\overrightarrow{x} = 0$ har kunne trivielle løsningen $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ og det betyder at vektorerne er lineær uavhengig. Desuden har likningssystemet $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ et løsning for hvert $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^3$ og det betyder at vektorerne utspenner $\mathbb{R}^3$.

(3) Mængden $\{1, t, t^2, t^3, \dots, t^n\}$ er en basis for $\mathbb{P}_n$ som hedder *standard basis* for $\mathbb{P}_n$. Det er klart at denne mængde utspenner $\mathbb{P}_n$, men hvorfor er den lineær uavhengig? Hvis

$$c_0 1 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_n t^n = \overrightarrow{0}(t),$$

for reelle tal $c_0, \dots, c_n$ så er venstre siden et polynom av grad mindre en n som evaluer til 0 i hvert punkt $t \in \mathbb{R}$. Den enste polynom med grad mindre end n som evaluerer til 0 i mere end n punkter er nullpolynomiet. Derfor er $c_0 = c_1 = \cdots = c_n$ og vi konkluderer at $\{1, t, t^2, t^3, \dots, t^n\}$ er lineær uavhengig.

(4) Er $\{1 - t^2, t - t^2, 2 - t + t^2\}$ en basis for $\mathbb{P}_2$? Først skal vi se om de er lineær uavhengige. For hvilke $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ har vi

$$c_1(1 - t^2) + c_2(t - t^2) + c_3(2 - t + t^2) = \overrightarrow{0}(t)?$$

Vis vi evaluer denne likning i tre punkter $t = -1$, $t = 0$ og $t = 1$ så finder vi at

$$\begin{aligned} -2c_2 + 4c_3 &= 0 \\ c_1 + 2c_3 &= 0 \\ 2c_3 &= 0. \end{aligned}$$

Det kan kun vær sant hvis $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ og det viser at polynomierne er lineært uavhengig. Utspenner de $\mathbb{P}_2$? Vis vi tag et generelt polynom $a + bt + ct^2 \in \mathbb{P}_2$ kan vi så finde $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ med

$$c_1(1 - t^2) + c_2(t - t^2) + c_3(2 - t + t^2) = a + bt + ct^2.$$

Lad os matche koeffisienter! Vi skal ha

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_3 &= a \\ c_2 - c_3 &= b \\ -c_1 - c_2 + c_3 &= c, \end{aligned}$$

som vi kan skrive som likningssystemet

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Sjekk selv at denne likningssystem altid har et løsning (med radreduksjon a matrisen)! Derfor er mængden en basis for $\mathbb{P}_2$.

Teorem 5. *Hvis $\mathcal{S} = \{\overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_p\} \subset V$ er en mængde av vektorer og*

$$H = span\{\overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_p\},$$

så gælder de følgende:

(1) *Hvis en vektor $\overrightarrow{v}_k \in \mathcal{S}$ kan uttrykkes som lineær kombination av de andre vektorer $\overrightarrow{v}_i$ i $\mathcal{S}$ så vil mængden vi får ved å fjerne $\overrightarrow{v}_k$ fra $\mathcal{S}$ fremdeles utspenne H.*

(2) *Hvis $H \neq \{\overrightarrow{0}\}$ så vil et undermængde fra $\mathcal{S}$ være en basis for H.*

Bevis. (1) La os anta at

$$\overrightarrow{v}_p = a_1\overrightarrow{v}_1 + \cdots + a_{p-1}\overrightarrow{v}_{p-1}.$$

Hvert $\overrightarrow{w} \in H$ kan skrives som

$$\overrightarrow{w} = c_1\overrightarrow{v}_1 + \cdots + c_p\overrightarrow{v}_p,$$

med $c_1, \dots, c_p \in \mathbb{R}$ og vi kan inserte likningen til $\overrightarrow{v}_p$ og se at

$$\begin{aligned} \overrightarrow{w} &= c_1\overrightarrow{v}_1 + \cdots + c_p(a_1\overrightarrow{v}_1 + \cdots + a_{p-1}\overrightarrow{v}_{p-1}) \\ &= (c_1 + c_pa_1)\overrightarrow{v}_1 + \cdots + (c_{p-1} + a_{p-1}c_p)\overrightarrow{v}_{p-1}. \end{aligned}$$

Det viser at $\overrightarrow{w} \in \text{span}\{\overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_{p-1}\}$ og vi har at

$$H = \text{span}\{\overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_{p-1}\},$$

fordi $\overrightarrow{w}$ var vælgt frit.

(2) Hvis $H \neq \{\overrightarrow{0}\}$ og $\{\overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_p\}$ er ikke allerede en basis for H så er mængden $\overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_p$ lineær afhængig. Det betyder at vi kan uttrykke mindst en av vektorerne som lineær kombination av de andre. Med (1) kan vi fjerne denne vektor og stadig ha et mængde som utspenner H. Vi fortsætter med denne prosess indtil vi får en mængde av vektorer som er lineæart uavhengig. Det er en basis til H! Hvorfor skal prosessen stoppe? Vi har started med en endlig mængde av vektorer og fjerner en i hvert skrit. Husk at en

mængde som består av kun en vektor er lineær uavhengig og prosessen stopper i hvert fald når kun en vektor er tilbage.

□

Basis av nullrommet, søylerommet og radrommet

Nullrommet. Vi har set i sidste forlæsning hvordan man finder en basis til $\mathrm{Nul}(A)$: Man løser lineære likningssystemet $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ og skriver generalle løsninger med frie variabler. Nu kan man læse av vektorer $\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_k$ sådan at løsningerne kan skrives som $c_1\overrightarrow{v}_1 + \cdots + c_k\overrightarrow{v}_k$ med frie variabler $c_1, \ldots, c_k$. Vektorerne $\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_k$ utspenner $\mathrm{Nul}(A)$. Bemærk at antallet k a spenningsmængde svar til antallet av frie variabler hvis $\mathrm{Nul}(A)$ er ikke $\{\overrightarrow{0}\}$. Man kan også sjekke at $\{\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_k\}$ er lineært uavhengig.

Søylerommet. Lad os starte med en eksempel.

Eksempel. Finne en basis til søylerummet $\mathrm{Col}\,(A)$ til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 12 & 1 & 5 & 5 \\ 2 & 8 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 20 & 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} = [\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \ldots, \overrightarrow{a}_5],$$

med søylerne $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \ldots, \overrightarrow{a}_5$. Man kan sjekke at

$$\overrightarrow{a}_2 = 4\overrightarrow{a}_1 \tag{1}$$

$$2\overrightarrow{a}_1 - \overrightarrow{a}_3 = \overrightarrow{a}_4, \tag{2}$$

og at $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_3, \overrightarrow{a}_5$ er lineær uavhengige. Det viser at de er en basis for $\mathrm{Col}\,(A)$. Det kan være vanskelig at finde basis til søylerummet på denne måle men der er et bedre metode: Vi kan radredusere A til matrisen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left[\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2, \ldots, \overrightarrow{b}_5\right],$$

med søylerne $\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2, \ldots, \overrightarrow{b}_5$. Vi ser at søylerne $\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_3, \overrightarrow{b}_5$ er pivotsøyler og at vi har

$$\overrightarrow{b}_2 = 4\overrightarrow{b}_1 \tag{3}$$

$$2\overrightarrow{b}_1 - \overrightarrow{b}_3 = \overrightarrow{b}_4. \tag{4}$$

Det er de sammen relationer som i (1) og (2) og indekser 1, 3 og 5 som svar til basen før er præcis indekserne hvor vi har pivotsøyler. Hvorfor sker det? Gik for eksempel på den første relation i (1). Det siger at

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 12 & 1 & 5 & 5 \\ 2 & 8 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 20 & 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Radoperasjonerne kan ændre likninger i denne matrise-vektor likningen men de kan ikke ændre at vektoren

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

giver nullvektoren efter matrise-vektor multiplikasjon. Derfor gælder også at $B\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ fordi B oppstår av A fra radoperasjoner. Lineær avhængighedsrelationer har sammen form end likningen ovenpå og derfor ville vektorerne $\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_3, \overrightarrow{b}_5$ være linear avhengig hvis vektorerne $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_3, \overrightarrow{a}_5$ ville være linear avhengig. I denne eksempel er de det ikke. I bevisen av den næste teorem ser vi denne argumentation lidt mere kompakte.

Teorem 6. *Pivotsøylene til en matrise A gir en basis for Col(A).*

Bevis. Vi har allerede set bevisen i det sidste eksempel. Lidt mere formalt lad os anta at A kan radreduseres til en matrise B i reduserte træppeform. Det betyder at der findes en inverterbare matrise C som oppfylder $B = CA$. Nu ser vi at $A\overrightarrow{x} = 0$ hvis og kun hvis $CA\overrightarrow{x} = 0$ hvis og kun hvis $B\overrightarrow{x} = 0$. Det viser at lineær avhengighetsrelationer mellom søylerne bevares under radoperasjoner og at pivotsøylerne i B (som er lineær avhengige og utspenner $\mathrm{Col}(B)$) svarer til en basis a søylerner av A for $\mathrm{Col}(A)$. □

Advarsel: Husk at ta søylerne fra matrisen A som svar til pivotsøyler i træppematrise B og ikke pivotsøylerne direkte fra B. Radoperasjoner kan ændre søylerommet men de bevarer lineær avhengighetsrelationer mellom søylerne.

Radrommet: Det er nemt at finde en basis for radrommet fordi radoperasjoner ikke endrer radrommet. Derfor kan vi radredusere matrisen og læse av en basis til radrommet. Generellt har vi efterfølgende teorem:

Teorem 7. *Hvis to matriser A og B er radekvivalente så er Row(A) = Row(B). Hvis B er på trappeform så er pivotradene (de som er ikke null) basis for radrommet til B og A.*

Bevis. Radoperasjoner erstatter en rad med en lineær kombinasjon av andre rader og derfor har vi $\mathrm{Row}(B) \subseteq \mathrm{Row}(A)$. Siden radoperasjoner kan reverseres med andre radoperasjoner så har vi også $\mathrm{Row}(B) \subseteq \mathrm{Row}(A)$. Vi konkluderer at $\mathrm{Row}(A) = \mathrm{Row}(B)$. Det er også klart at pivotradene i B er basis for $\mathrm{Row}(B)$. □