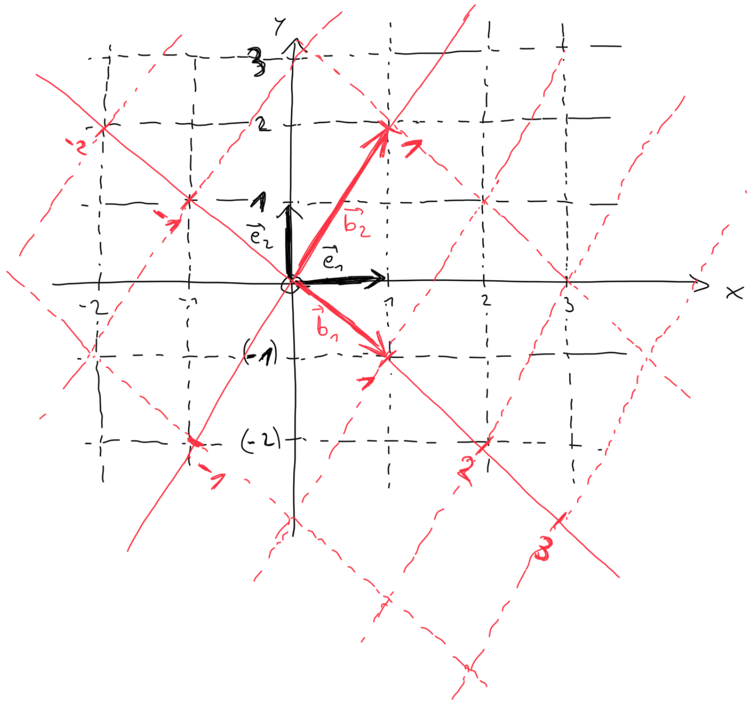
KOORDINATSYSTEMER (SEC. 4.4)

For at forstå generelle vektorrom kan vi bruke en basis og udtryk vektorerne i den tilhørige koordinatsystem. Se Fig. 1 for en illustration a to koordinatsystemer av $\mathbb{R}^2$. Den hvite koordinatsystem er den standardkoordinatsystem som vi har set før. Den røde basis kan også brukes for at definer en koordinatsystem (se røde linjer). Vi kommer nu til at formaliser intuisjonen fra figuren og at forstå hvordan vi kan skifte mellom to koordinatsystemer.



FIGUR 1. To koordinatsystemer av $\mathbb{R}^2$.

Teorem 8 (Unike representasjon)**.** *La $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ være en basis for vektorrummet V. For hvert $\vec{x} \in V$ finnes da unike skalare $c_1, \dots, c_n$ slik at*

$$\vec{x} = c_1 \vec{b}_1 + \cdots + c_n \vec{b}_n.$$

Skalarerne $c_1, \dots, c_n$ kalles også for koordinater til $\vec{x}$ relativt til basisen $\mathcal{B}$ og vi skriver

$$[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

for den såkallte koordinate vektor *av $\vec{x}$ relativt til basisen $\mathcal{B}$.*

Bevis. Anta at $\vec{x}$ kan skrives på to måter:

$$\vec{x} = c_1 \vec{b}_1 + \cdots + c_n \vec{b}_n = d_1 \vec{b}_1 + \cdots + d_n \vec{b}_n.$$

Men nu kan vi regne ud at

$$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{x} - \overrightarrow{x} = (c_1 - d_1)\overrightarrow{b}_1 + \cdots + (c_n - d_n)\overrightarrow{b}_n.$$

Fordi $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{b}_1, \ldots, \overrightarrow{b}_n\}$ er en basis kan det kun være sant hvis

$$0 = c_1 - d_1 = \cdots = c_n - d_n,$$

og vi har $c_1 = d_1, \ldots, c_n = d_n$. Det viser at koordinater er unike! Siden $\mathcal{B}$ utspenner V (det er jo en basis!) eksisterer da koordinater for hvert $\overrightarrow{x} \in V$. □

La os se på et eksempel:

Eksempel. La $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2\}$ være basisen for $\mathbb{R}^2$ som består av vektorer

$$\overrightarrow{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \overrightarrow{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Hvis $x \in \mathbb{R}^2$ har koordinate vektor

$$[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

relativt til basisen $\mathcal{B}$, hva er $\overrightarrow{x}$, dvs. hva er koordinaterne av $\overrightarrow{x}$ relativt til standard basisen

$$\mathcal{E} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

av $\mathbb{R}^2$? Vi kan regne ut at

$$\overrightarrow{x} = (-2)\overrightarrow{b}_1 + 3\overrightarrow{b}_2 = (-2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Vi skriver normalt $\overrightarrow{x}$ i stedet for $[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{E}}$ for vektorer i $\mathbb{R}^2$ (eller mere generalt i $\mathbb{R}^n$).

Koordinater i $\mathbb{R}^n$

Hvordan finner vi koordinater av et vektor $\overrightarrow{x}$ relativt til $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{b}_1, \ldots, \overrightarrow{b}_n\}$? Det har vi set før. Man skriver vektorerne fra basen som søyler i en matrise

$$B = \left[\overrightarrow{b}_1, \ldots, \overrightarrow{b}_n\right],$$

og løser lineær likningssystemet $B\overrightarrow{c} = \overrightarrow{x}$. Løsningen er unike (efter den sidste teorem) og inneholder koordinater av $\overrightarrow{x}$. La os se på et konkret eksempel:

Eksempel. La

$$\overrightarrow{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix},$$

være vektorer i $\mathbb{R}^2$ og la $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2\}$. Hvordan finner vi koordinate vektoren $[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}}$ av $\overrightarrow{x}$ relativt til $\mathcal{B}$? Vi må finne koordinater $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ så at

$$c_1\overrightarrow{b}_1 + c_2\overrightarrow{b}_2 = \overrightarrow{x},$$

og det gør vi med at løse et lineært likningssystem $A\overrightarrow{c} = \overrightarrow{x}$ med matrisen

$$A = \left(\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

som har $\overrightarrow{b}_1$ og $\overrightarrow{b}_2$ som søyler. Løsningen er $c_1 = 3$ og $c_2 = 2$ og vi har

$$[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Matrisen A i den sidste eksempel skifter koordinater relativt til basisen $\mathcal{B}$ til koordinater relativt til standard basisen. I eksempel ha vi

$$A \cdot [\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = [\overrightarrow{x}]_{\mathcal{E}} = \overrightarrow{x},$$

hvor

$$\mathcal{E} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

er standard basisen. Det virker også mere generalt:

Definisjon. *Anta* $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{b}_1, \ldots, \overrightarrow{b}_n\}$ *være en basis for* $\mathbb{R}^n$*. Matrisen*

$$P_{\mathcal{B}} = \left[\overrightarrow{b}_1, \ldots, \overrightarrow{b}_n\right],$$

kalles koordinatskiftematrise *fra* $\mathcal{B}$ *til standardbasisen* $\mathcal{E}$ *for* $\mathbb{R}^n$*, dvs. basisen*

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

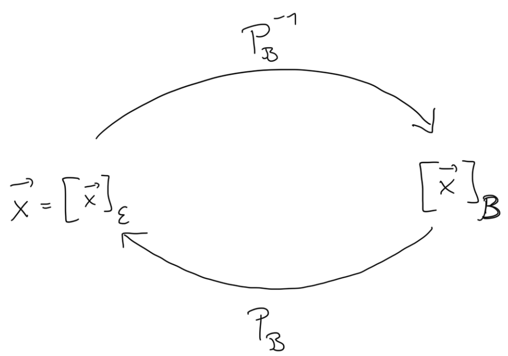
Koordinatskiftematrisen $P_{\mathcal{B}}$ skifter basisen fra $\mathcal{B}$ til standardbasisen. Hvordan skifter vi koordinater fra standardbasisen til $\mathcal{B}$? Koordinatskiftematrisen $P_{\mathcal{B}}$ er altid inverterbar! Hvorfor det? Lineære likningssystemet $P_{\mathcal{B}}\overrightarrow{c} = \overrightarrow{x}$ ha et løsning for hvert $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$, nemlig koordinatvektoren

$$\overrightarrow{c} = [\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}},$$

og den er unike efter Teorem 8. Multiplikasjonen med inverse matrise skifter koordinater fra standard basisen $\mathcal{E}$ til basis $\mathcal{B}$, dvs.

$$P_{\mathcal{B}}^{-1}\overrightarrow{x} = [\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}}.$$

Se Fig. 2 for en illustrasjon.



FIGUR 2. Koordinateskift

KOORDINATER I GENERELLE VEKTORROM

For at forstå generelle vektorrom er det ofte viktigt at vælge en bra basis! Efter man har valgt en basis kan vektorer i vektorrommet representæres relativt til basisen. For at gør det lidt mere formalt introduserer vi koordinatsavbildningen:

Definisjon. *Hvis $\mathcal{B}$ er en basis for V så kalles transformasjon*

$$\overrightarrow{x} \mapsto [\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}} \quad (\textit{fra } V \textit{ til } \mathbb{R}^n)$$

for koordinatsavbildningen.

Den næste teorem viser nogen viktige egenskaber av koordinatsavbildningen:

Teorem 9. *La $\mathcal{B}$ være en basis for V. Da er koordinatsavbildningen en lineær transformasjon som er $1 \to 1$, og på $\mathbb{R}^n$ (den treffer hele $\mathbb{R}^n$).*

Bevis. Ta to vektorer $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \in V$ skrives i basisen $\mathcal{B}$ som

$$\overrightarrow{u} = c_1 \overrightarrow{b}_1 + \cdots + c_n \overrightarrow{b}_n$$
$$\overrightarrow{w} = d_1 \overrightarrow{b}_1 + \cdots + d_n \overrightarrow{b}_n.$$

Vi ser at

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} = (c_1 + d_1) \overrightarrow{b}_1 + \cdots + (c_n + d_n) \overrightarrow{b}_n,$$

og vi konkluderer at

$$[\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} c_1 + d_1 \\ \vdots \\ c_n + d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = [\overrightarrow{u}]_{\mathcal{B}} + [\overrightarrow{w}]_{\mathcal{B}}.$$

Koordinatsavbildningen bevarer addisjon! Vi kan også regne ut at

$$r \cdot \overrightarrow{u} = rc_1 \overrightarrow{b}_1 + \cdots + rc_n \overrightarrow{b}_n,$$

og vi konkluderer at

$$[r \cdot \overrightarrow{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} rc_1 \\ \vdots \\ rc_n \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = r\, [\overrightarrow{u}]_{\mathcal{B}}.$$

Koordinatsavbildningen bevarer skalare multiplikasjon og vi har vist at den er lineært! I hjemme og tutor oppgaver viser dere at koordinatsavbildningen er $1 \to 1$ og på $\mathbb{R}^n$. □

En lineær transformasjon $T : V \to W$ som er $1 \to 1$ og på W kalles en *isomorfi* mellom vektorrom V og W. I praksis betyder det at vektorrom V og W forholder seg på sammen måde og vi kan bruke transformasjonen T for at skifte mellom de to.

Med koordinatsavbildningen kan vi bruke teorien og intuisjonen fra $\mathbb{R}^n$ til at forstår et ukendt vektorrom. La oss se på et eksempel:

Eksempel.

(1) Sidste gang har vi set at $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$ er en basis for vektorrommet $\mathbb{P}_3$ av polynomier med grad mindre enn 3. Hvis $\overrightarrow{p}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ er et polynom i $\mathbb{P}_3$ så er koordinater

$$[\overrightarrow{p}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Avbildningen $\overrightarrow{p} \mapsto [\overrightarrow{p}]_{\mathcal{B}}$ er en isomorfi fra $\mathbb{P}_3$ til $\mathbb{R}^4$ og vi kan forstå polynomier i $\mathbb{P}_3$ med intuisjon fra $\mathbb{R}^4$.

Viktigt konsekvens: To polynomier er det sammen hvis og kun hvis deres koeffisjenter er de sammen. For eksempel ha vi

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3,$$

hvis og kun hvis $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ og $a_3 = b_3$.

(2) Planet av vektorer $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$ som oppfylder likningen $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ er et underrom av $\mathbb{R}^3$. Vis at $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2\}$ med

$$\overrightarrow{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \overrightarrow{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

er en basis for dette planet. Vis også at

$$\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ligger i planet og finn $[\overrightarrow{y}]_{\mathcal{B}}$.

La oss først se at $\mathcal{B}$ er en basis: Det er klart at de to vektorer er lineær uavhengige fordi

$$c_1\overrightarrow{b}_1 + c_2\overrightarrow{b}_2 = \begin{pmatrix} -c_1 - c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

hvis og kun hvis $c_1 = c_2 = 0$. Utspenner $\mathcal{B}$ planet? Ta et generelt vektor

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

med $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Vi må finde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sådan at

$$c_1\overrightarrow{b}_1 + c_2\overrightarrow{b}_2 = \overrightarrow{x},$$

og derfor skal vi løse et lineært likningssystem! Vi radreduser

$$\left(\begin{array}{cc|c} \overrightarrow{b}_1 & \overrightarrow{b}_2 & \overrightarrow{x} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

og konkluderer at $c_1 = x_2$ og $c_2 = x_3$. Det virker for hvert $\overrightarrow{x}$ og det viser at $\mathcal{B}$ er en basis. Hva er koordinatsavbildningen relativt til denne basis? Det ha vi set allerede! Vi har løst den lineære likningssystem og funnet at koordinatavbildningen er

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = [\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}}.$$

for hvert vektor $\overrightarrow{x}$ i planet. *Med at representær vektoren i basisen har vi fundet et mere kompakte form som bruker kun* 2 *variabler i stedet for* 3 *variabler!.*

Til sidst kan vi ta vektoren $\overrightarrow{y}$. Siden $0 + 1 - 1 = 0$ ligger $\overrightarrow{y}$ i planet og vi finner

$$[\overrightarrow{y}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$