DIMENSJON AV VEKTORROM (SEC. 4.5)

Vi har set før at en basis for et vektorrom kan hverken har for få vektorer eller for mange vektorer. Intuisjonen er at en mængde av vektorer kan være for lille for at utspenne hele vektorrommet, men hvis den er for stor så kan vektorerne ikke være lineært uavhengig. Den precise antall av vektorer i en basis er en konstante for hvert vektorrom og det kalles for *dimensjonen*. La oss gør det precise nu!

Teorem 10. *Anta $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{b}_1, \dots, \overrightarrow{b}_n\}$ er en basis for et vektorrom V. Ethvert sett som inneholder mer enn n vektorer fra V må være lineært avhengig.*

Bevis. La $\mathcal{S} = \{\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_p\} \subseteq V$ med $p > n$. Fordi $p > n$ er mængden

$$\{[\overrightarrow{u}_1]_{\mathcal{B}}, \dots, [\overrightarrow{u}_p]_{\mathcal{B}}\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

lineært avhengig (matrisen $\left([\overrightarrow{u}_1]_{\mathcal{B}}, \dots, [\overrightarrow{u}_p]_{\mathcal{B}}\right)$ med søyler $[\overrightarrow{u}_i]_{\mathcal{B}}$ kan ikke har pivot i hvert søyle fordi der er for mange søyler!). Derfor er der $c_1, \dots, c_p$, som er ikke alle null, sådan at

$$c_1 [\overrightarrow{u}_1]_{\mathcal{B}} + \cdots + c_p [\overrightarrow{u}_p]_{\mathcal{B}} = \overrightarrow{0}_{\mathbb{R}^n}.$$

Fordi koordinatsavbildningen er en lineært transformasjon og fordi $\left[\overrightarrow{0}_V\right]_{\mathcal{B}} = \overrightarrow{0}_{\mathbb{R}^n}$ ha vi

$$[c_1 \overrightarrow{u}_1 + \cdots + c_p \overrightarrow{u}_p]_{\mathcal{B}} = \left[\overrightarrow{0}_V\right]_{\mathcal{B}},$$

og vi konkluderer at

$$c_1 \overrightarrow{u}_1 + \cdots + c_p \overrightarrow{u}_p = \overrightarrow{0}_V,$$

siden koordinatsavbildningen er inverterbar. Men den sidste likning betyder at $\mathcal{S} = \{\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_p\} \subseteq V$ er lineært avhengig. □

Teorem 11. *Hvis V har en basis med n vektorer, så vil enhver annen basis for V også ha n vektorer.*

Bevis. La $\mathcal{B}_1$ være en basis for V med n vektorer og $\mathcal{B}_2$ en annen basis for V. Fordi $\mathcal{B}_1$ er en basis og mengden $\mathcal{B}_2$ er lineær uavhengig (det er jo en basis!) så kan der ikke være mere enn n vektorer i $\mathcal{B}_2$ efter Teorem 10. Men fordi $\mathcal{B}_2$ er også en basis og mengden $\mathcal{B}_1$ med n vektorer er lineær uavhengig så kan der heller ikke være mindre enn n vektorer i $\mathcal{B}_2$ efter Teorem 10. Vi konkluder at der er præcis n vektorer i $\mathcal{B}_2$ også. □

Den sidste teorem viser at antallet av vektorer i hvert basis for en vektorrom V (som ha en endelig basis) er konstante. Vi har følgende definisjon:

Definisjon. *Hvis V utspennes av et endelig sett av vektorer så sier vi at V er* endeligdimensjonal *og dimensjonen, som vi skriver som* $\dim(V)$*, er antallet av vektorer i en basis for V. Dimensjonen av vektorrommet $\{\overrightarrow{0}\}$ er definert som 0. Hvis V ikke utespennes av et endelig sett sier vi at V er uendligdimensjonal.*

La oss se på nogen eksempler:

Eksempel.

(1) Standard basisen for $\mathbb{R}^n$ inneholder n vektorer. Derfor har vi $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

(2) Vektorrommet $\mathbb{P}_2$ av polynomier med grad mindre eller like med 2 har standard basis $\{1, t, t^2\}$. Derfor har vi $\dim(\mathbb{P}_2) = 3$. Generalt har vi $\dim(\mathbb{P}_n) = n + 1$.

(3) Hva er dimensjonen a underrom

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a - 3b + 6c \\ 5a + 4d \\ b - 2c - d \\ 5d \end{pmatrix} \ : \ a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Vi ser at $H = \operatorname{span}\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3, \overrightarrow{v}_4\}$ med

$$\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Er det en basis for H? Nej, det er det ikke! Vi har $\overrightarrow{v}_3 = -2\overrightarrow{v}_2$. Teorem 5 fra seksjon 4.3. sier at vi kan fjerne $\overrightarrow{v}_3$ fra mengden og stadigvæk har en mengde som utspenner H. Vi kan også sjekke at $\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_4\}$ er lineær uavhengig og fordi $H = \operatorname{span}\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_4\}$ så er de også en basis. Derfor ser vi at $\dim(H) = 3$.

(4) Hvilke underrom finnes der i $\mathbb{R}^3$. Vi kan klassifisere dem efter dimensjonen:
- 0-*dimensjonale underrom:* Det er kun underrommet $\{\overrightarrow{0}\}$.
- 1-*dimensjonale underrom:* Alle underrom som er utspennet av en enkelt ikke-null vektor. Det er linjer gjennom origen!
- 2-*dimensjonale underrom:* Alle underrom som er utspennet av to lineær uavhengige vektorer. Det er planer gjennom origen!
- 3-*dimensjonale underrom:* Alle underrom som er utspennet av tre lineær uavhengige vektorer. Det er kun $\mathbb{R}^3$ selv.

Underrom av endeligdimensjonale vektorrom. Vi har set før at ethvert mengde av vektorer som utspenner et underrom kan reduseres til en basis av underrommet. Den næste teorem går i den annen retning:

Teorem 12. *La H være et underrom av et endeligdimensjonalt vektorrom V. Enhver lineært uavhengig mengde fra H kan utvides til en basis for H. Det viser at H er også endeligdimensjonal og at* $\dim(H) \leq \dim(V)$.

Bevis. Hvis $H = \{\overrightarrow{0}\} \subseteq V$ så er der ikke en lineært uavhengige mengde av vektorer i H. Efter definisjonen er $\dim(H) = 0 \leq \dim(V)$. Ellers la $\mathcal{S} = \{\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_k\}$ være en lineært uavhengig mengde av vektorer i H. Hvis $\mathcal{S}$ utspenner H så er $\mathcal{S}$ en basis for H og vi er ferdige. Hvis $\mathcal{S}$ ikke utspenner H så kan vi finde en vektor $\overrightarrow{u}_{k+1} \in H$ som er ikke i $\operatorname{span}(\mathcal{S})$. Mengden $\{\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_k, \overrightarrow{u}_{k+1}\}$ er fortsatt lineært uavhengig! Hvorfor? Hvis der finnes $c_1, \ldots, c_{k+1}$ så at

$$c_1\overrightarrow{u}_1 + \cdots + c_k\overrightarrow{u}_k + c_{k+1}\overrightarrow{u}_{k+1} = \overrightarrow{0},$$

og $c_{k+1} \neq 0$ så kan vi skrive

$$\overrightarrow{u}_{k+1} = -\frac{1}{c_{k+1}}\left(c_1\overrightarrow{u}_1 + \cdots + c_k\overrightarrow{u}_k\right),$$

og det vil være i $\operatorname{span}(\mathcal{S})$. Fordi $\overrightarrow{u}_{k+1}$ er ikke i $\operatorname{span}(\mathcal{S})$ er $c_{k+1} = 0$ og vi konkluderer at $c_1 = \cdots = c_k = 0$ siden $\mathcal{S}$ er lineært uavhengig.

Vi kan bruke prosessen iterativt med at tilføge et nyt vektor hver skrit. Så længe mengden ikke utspenner H så kan prosessen fortsettes. Når mengden utspenner H så har vi funnet en basis. Teorem 10 viser at prosessen stopper med mindre eller like mange vektorer enn $\dim(V)$. Når prosessen stopper så ha vi funnet en basis til H og derfor har vi $\dim(H) \leq \dim(V)$. □

Husk at underrommet H i den sidste teorem kan være like med V selv! Den næste teorem gør det nemmer for dere at finne en basis for et underrom.

Teorem 13 (Basisteoremet)**.** *Anta at vektorrommet V har dimensjon $p \geq 1$. Enhver lineært uavhengig mengde i V med p vektorer er automatisk en basis for V. Enhver mengde med p vektorer som utspenner V er automatisk en basis.*

Bevis. Ethvert lineær uavhengig mengde i V kan forlenges til en basis for V og basisen har præcis p vektorer fordi $p = \dim(V)$. Derfor er hvert lineær uavhengig mengde med p vektorer automatisk en basis fordi den kan ikke forlenges vider. Hvis vi anta at en mengde med p vektorer utspenner V så er det automatisk lineær uavhengig (og en basis). Hvis denne vil ikke være lineær uavhengig så kan vi fjerne vektorer fra denne og få en basis for V. Men fordi $p = \dim(V)$ finnes der ikke en basis med mindre enn p vektorer så mengden vi started med var allerede en basis. □

Dimensjoner av Nul(A), Col(A) og Row(A). Dimensjonerne av vektorrommer $\mathrm{Nul}(A)$, $\mathrm{Col}(A)$ og $\mathrm{Row}(A)$ som er assosiert til en $m \times n$ matrise A har særlige navner:

Definisjon.

(1) *Dimensjonen til $Col(A)$ kalles* rangen *til A. Vi skriver $rank(A)$ for denne.*
(2) *Dimensjonen til $Nul(A)$ kalles* nulliteten *til A. Vi skriver $nulitet(A)$ for denne.*

La oss se på et eksempel:

Eksempel. Finne nullitetet og rangen til

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

Vi radreduser matrisen til

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

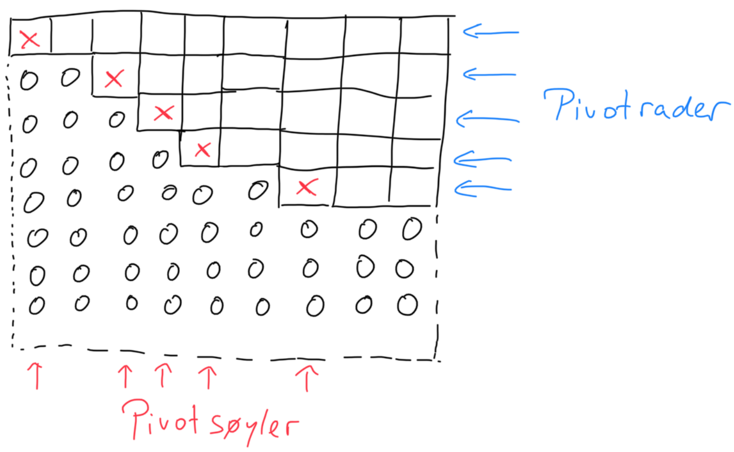
Den første og tredje søyle er pivotsøyler og vi vil at tilsvarende søyler i A giver en basis for $\mathrm{Col}(A)$. Derfor har vi $\mathrm{rank}(A) = 2$. Vi ser også at likningssystemet $A\vec{x} = \vec{0}$ har 3 frie variabler som tilsvarer til ikke-pivotsøyler (søyler nummer $2, 4, 5$). Derfor er $\mathrm{nulitet}(A) = 3$.

Søyler fra A som svarer til pivotsøyler i reduserte træppeformen giver en basis for $\mathrm{Col}(A)$ og pivotrader (ikke null rader i træppeformen) for A giver en basis for $\mathrm{Row}(A)$. Antallet av vektorer i de to basiser er altid det sammen! Der finnes like så mange pivotsøyler som pivotrader. For at se hvorfor det er sant kan vi tænke på en træppe. Hvis man går på så en træppe så kan man kun komme oppe et styk hvis man går opp et træppetrin. For at gå oppe alle pivotrader skal man så gå over like så mange træppetrin som svarer til pivotsøyler (se Fig. 1 for en illustrasjon). La oss formuler denne observasjon som et teorem:

Teorem. *Dimensjonen til $Col(A)$ og til $Row(A)$ er det sammen og like med $rank(A)$.*

For at oppsummer diskussionen husker vi de følgende punkter:

- $\mathrm{nulitet}(A) = \dim(\mathrm{Nul}(A)) =$ antall ikke-pivotsøyler i A.



FIGUR 1. Pivotrader og pivotsøyler i en træppematrise

- $\operatorname{rank}(A) = \dim(\operatorname{Col}(A)) = \dim(\operatorname{Row}(A)) =$ antall pivotsøyler i A.

Hvor mange søyler er der i en $m \times n$ matrise A. Der er selvfølgelig n søyler i alt. Denne nemme observasjon har en viktigt konsekvens:

Teorem 14 (Rangteoremet)**.** *La A være en $m \times n$ matrise. Da er*

$$\text{rank}(A) + \text{nulitet}(A) = n.$$

Bevis. Nullitetet nulitet(A) svarer til antallet av ikke-pivotsøyler og rangen rank(A) svar til antallet av pivotsøyler i reduserte træppeform av A. Vi har

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(A) + \operatorname{nulitet}(A) &= \text{Antall pivotsøyler} + \text{Antall ikke-pivotsøyler}\\ &= \text{Antall alle søyler} = n.\end{aligned}$$

□

Vi kan sjekke i eksemplet at 3×5 matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix},$$

har $\operatorname{nulitet}(A) + \operatorname{rank}(A) = 3 + 2 = 5$. La oss se på to eksempler hvordan man kan bruke rangteoremet:

Eksempel.

(1) Hvis en 7×9 matrise B har nullitet 2 hva er rangen til den? Matrisen har 9 søyler i alt, og vi regner ut at
$$\operatorname{rank}(B) = 9 - 2 = 7.$$

(2) Anta at dere har to løsninger til en homogene likningssystem $A\vec{x} = \vec{0}$ for en 40×42 matrise A og at dere er sikkert at de er lineært uavhengig og alle andre løsninger kan skrives som lineær kombinasjoner av de to løsninger. Har den inhomogene system $A\vec{x} = \vec{b}$ en løsning for alle $\vec{b} \in \mathbb{R}^{40}$? Antagelsen betyder at $\operatorname{nulitet}(A) = 2$ og rangteoremet viser at $\operatorname{rank}(A) = 42 - 2 = 40$. Det betyder at søylerommet $\operatorname{Col}(A)$ har dimensjonen 40. Men $\operatorname{Col}(A)$ er et underrom av $\mathbb{R}^{40}$ og det er kun muligt

hvis $\mathrm{Col}(A) = \mathbb{R}^{40}$. Vi konkluderer at hvert $\overrightarrow{b}$ kan skrives som $A\overrightarrow{x}$ for mindst en vektor $\overrightarrow{x}$ og derfor kan vi være sikkert at inhomogene systemet $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ har alltid en løsning.

Rangen og inverbare matriser. Hvornår er en $n \times n$ matrise A inverterbar? Dere har set før (i kurset“ Lineære Algebra og Analyse”) at så en matrise er inverterbar hvis og kun hvis likningssystemet $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ har et unik løsning $\overrightarrow{x}$ for hvert $\overrightarrow{b}$. Den næste teorem forbinder denne definisjon med underrom vi har talt om i dag.

Teorem. *La A være en $n \times n$ matrise. Følgende er ekvivalent:*

(1) A er inverterbar.
(2) Søylene i A er en basis for $\mathbb{R}^n$.
(3) $Col(A) = \mathbb{R}^n$.
(4) $rank(A) = n$.
(5) $nulitet(A) = 0$.
(6) $Nul(A) = \{0\}$.

Bevis. La oss vise

$$(1) \Rightarrow (6) \Rightarrow (5) \Rightarrow (4) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1).$$

$(1) \Rightarrow (6)$: Hvis A er inverterbar så er unike løsning til likningssystemet $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ kun $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$. Derfor er $\mathrm{Nul}(A) = \{0\}$.

$(6) \Rightarrow (5)$: Hvis $\mathrm{Nul}(A)) = \{0\}$ så finner vi at $\mathrm{nulitet}(A) = \dim(\mathrm{Nul}(A)) = \dim(\{0\}) = 0$.

$(5) \Rightarrow (4)$: Hvis $\mathrm{nulitet}(A) = 0$ så finner vi med rangteoremet at $\mathrm{rank}(A) = n - 0 = n$.

$(4) \Rightarrow (3)$: Hvis $\mathrm{rank}(A) = n$ så er $\dim(\mathrm{Col}(A)) = n$. Men $\mathrm{Col}(A)$ er et underrom av $\mathbb{R}^n$ og vi har $\mathrm{Col}(A) = \mathbb{R}^n$ fordi $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

$(3) \Rightarrow (2)$: Hvis $\mathrm{Col}(A)) = \mathbb{R}^n$ så utspenner søylerne av A hele $\mathbb{R}^n$ (det er bar definisjonen av $\mathrm{Col}(A)$). Siden der finnes kun n søyler og $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ så er søylerne av A også en basis (se Teorem 13).

$(2) \Rightarrow (1)$: Hvis søylerne av A er en basis så er matrisen A har likningssystemet $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ et unike løsning for hvert $\overrightarrow{b}$ nemlig hvor $\overrightarrow{x}$ er koordinatevektoren til $\overrightarrow{b}$ i basisen av søylerne av A.

□