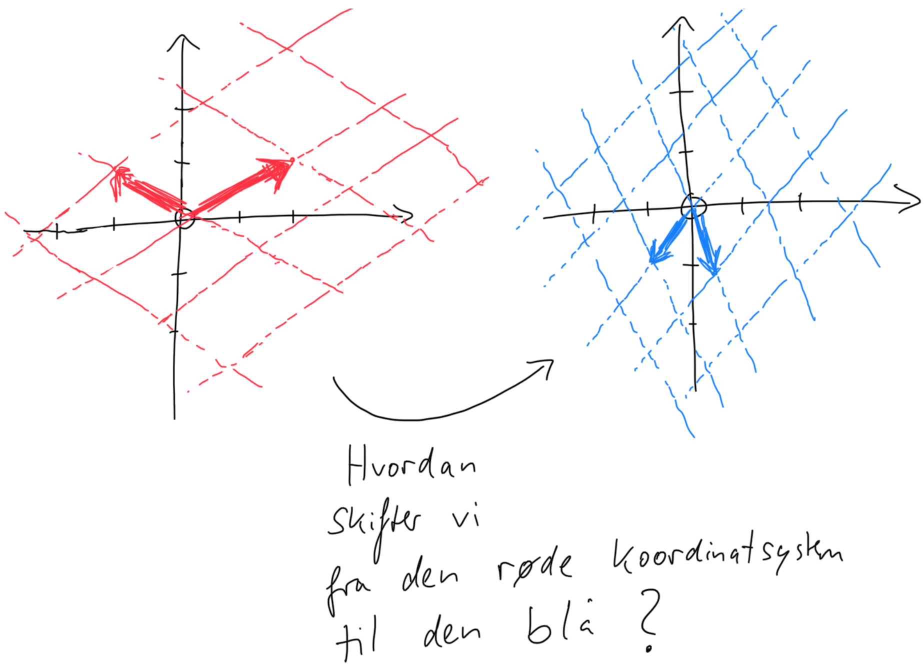
## BASISSKIFTE (SEC. 4.6)

Vi har set allerede hvordan man representærer generelle vektorer i et koordinatsystem som kommer fra en basis: Koordinatsavbildningen laver transformasjonen $\vec{x} \mapsto [\vec{x}]_{\mathcal{B}}$ med koordinatevektoren $[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$. Hva nu hvis vi har to basiser $\mathcal{C}$ og $\mathcal{B}$. Hvordan henger koordinatevektorer $[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$ og $[\vec{x}]_{\mathcal{C}}$ og er det muligt at skifte mellom dem (se Fig.1)?




FIGUR 1. To koordinatesystemer for $\mathbb{R}^2$.

La oss starte med et eksempel:

**Eksempel.** La $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ og $\mathcal{C} = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2\}$ være to basiser for et vektorrom $V$ så at

$$\vec{b}_1 = 4\vec{c}_1 + \vec{c}_2 \quad \text{og} \quad \vec{b}_2 = -6\vec{c}_1 + \vec{c}_2.$$

Hvis

$$\vec{x} = 3\vec{b}_1 + \vec{b}_2,$$

dvs. $[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, hva er $[\vec{x}]_{\mathcal{C}}$? Vi husker at koordinateavbildningen er en lineært transformasjon og derfor har vi

$$[\vec{x}]_{\mathcal{C}} = \left[3\vec{b}_1 + \vec{b}_2\right]_{\mathcal{C}} = 3\left[\vec{b}_1\right]_{\mathcal{C}} + \left[\vec{b}_2\right]_{\mathcal{C}}.$$

Vi kenner koordinater av vektorer $\vec{b}_1$ og $\vec{b}_2$ i basisen $\mathcal{C}$ og de er

$$\left[\vec{b}_1\right]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \left[\vec{b}_2\right]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Derfor finner vi

$$[\vec{x}]_{\mathcal{C}} = 3\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-6\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}.$$

Hvis vi gikker på den sidste likning så ser vi at den kan skrives som en lineære transformasjon

$$[\vec{x}]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix}4 & -6\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \left(\left[\vec{b}_1\right]_{\mathcal{C}}, \left[\vec{b}_2\right]_{\mathcal{C}}\right)[\vec{x}]_{\mathcal{B}}.$$

Transformasjonsmatrisen har koordinatevektorer $\left[\vec{b}_1\right]_{\mathcal{C}}$ og $\left[\vec{b}_2\right]_{\mathcal{C}}$ som søyler.

Den sidste eksempel viser et mere generalt konsept:

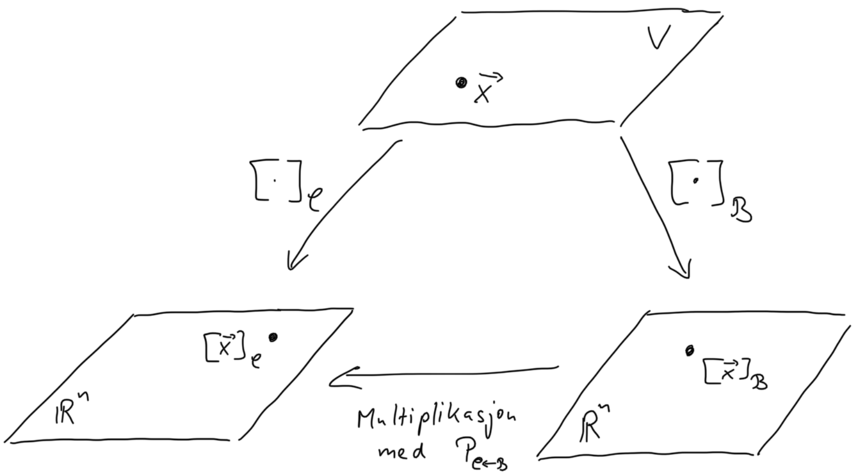
**Teorem 15.** *La $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ og $\mathcal{C} = \{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n\}$ være basiser for et vektorrom $V$. Da finnes det en unik $n \times n$ matrise $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ slik at*

$$[\vec{x}]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\,[\vec{x}]_{\mathcal{B}}. \tag{1}$$

*Videre er*

$$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \left(\left[\vec{b}_1\right]_{\mathcal{C}}, \dots, \left[\vec{b}_n\right]_{\mathcal{C}}\right),$$

*dvs. at søylerne i $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ fås ved å finne koordinatene til de "gamle" basisvektorene relativt til den "nye" basisen $\mathcal{C}$. Matrisen $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ kalles* koordinatskiftematrisen *fra $\mathcal{B}$ til $\mathcal{C}$ (se Fig. 2 for en illustrasjon).*




FIGUR 2. Koordinatskiftematrisen.

*Bevis.* Beviset følger sammen strategi som vi har brukt i eksemplen før. Hvert vektor $\vec{v} \in V$ kan skrives som

$$\vec{v} = x_1\vec{b}_1 + \cdots + x_n\vec{b}_n,$$

fordi $\mathcal{B}$ er en basis og vi har koordinatevektoren

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}.$$

Koordinatsavbildningen til basis $\mathcal{C}$ er et lineært transformasjon og vi har

$$[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{C}} = x_1 \left[\overrightarrow{b}_1\right]_{\mathcal{C}} + \cdots + x_n \left[\overrightarrow{b}_n\right]_{\mathcal{C}}.$$

Denne likning kan skrives som

$$[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{C}} = \left(\left[\overrightarrow{b}_1\right]_{\mathcal{C}}, \ldots, \left[\overrightarrow{b}_n\right]_{\mathcal{C}}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} \, [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{B}},$$

med koordinatskiftematrisen $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ fra teoremet.

Til sidst skal vi vise at denne matrise er unike, dvs. at der ikke finnes et annen matrise $Q$ som gør transformasjonen

$$[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{C}} = Q \, [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{B}} \qquad (*)$$

for hvert vektor $\overrightarrow{v} \in V$. Anta at vi har en matrise som oppfylder $(*)$ for hvert $\overrightarrow{v} \in V$. Hvis vi velger $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{b}_1$ så har vi

$$\left[\overrightarrow{b}_1\right]_{\mathcal{C}} = Q \left[\overrightarrow{b}_1\right]_{\mathcal{B}} = Q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

fordi $\overrightarrow{b}_1 = 1 \cdot \overrightarrow{b}_1 + 0 \cdot \overrightarrow{b}_2 + \cdots + 0 \cdots \overrightarrow{b}_n$. Men vektoren

$$Q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (\overrightarrow{q}_1, \ldots, \overrightarrow{q}_n) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{q}_1$$

er den første søyle av $Q$. Vi konkluderer at

$$\overrightarrow{q}_1 = \left[\overrightarrow{b}_1\right]_{\mathcal{C}}.$$

Vi kan bruke det samme argument for hvert søyle av $Q$ og vi finner at

$$\left[\overrightarrow{b}_k\right]_{\mathcal{C}} = Q \left[\overrightarrow{b}_k\right]_{\mathcal{B}} = \overrightarrow{q}_k.$$

for alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ fordi

$$\left[\overrightarrow{b}_k\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \text{ i position } k. \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Søylerne av $Q$ er koordinatevektorer $\left[\overrightarrow{b}_1\right]_{\mathcal{C}}, \left[\overrightarrow{b}_2\right]_{\mathcal{C}}, \cdots, \left[\overrightarrow{b}_n\right]_{\mathcal{C}}$ og det betyder at $Q$ er koordinatskiftematrisen $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ fra teoremet.

$\square$

Søyler fra koordinatsskiftematrisen $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ er koordinatevektorer $\left[\overrightarrow{b}_1\right]_{\mathcal{C}}, \ldots, \left[\overrightarrow{b}_n\right]_{\mathcal{C}}$ og de er lineært uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^n$ (som dere viser i oppgave 29 i Section 4.4.). Det betyder at

$$\operatorname{rank}(P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}) = n,$$

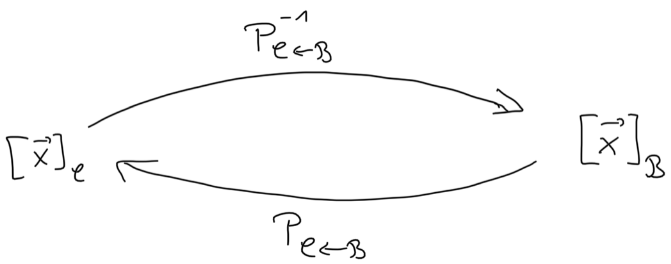
og matrisen $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ er inverterbar efter den inverse matrise teorem. Hvis vi multipliserer likningen (1) på begge sider med $P^{-1}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ så finner vi at

$$[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}} = P^{-1}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\,[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{C}}\,.$$

Matrisen $P^{-1}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ konverterer $\mathcal{C}$-koordinater til $\mathcal{B}$-koordinater og det viser at

$$P^{-1}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$$

Se Fig. 3 for en illustrasjon.

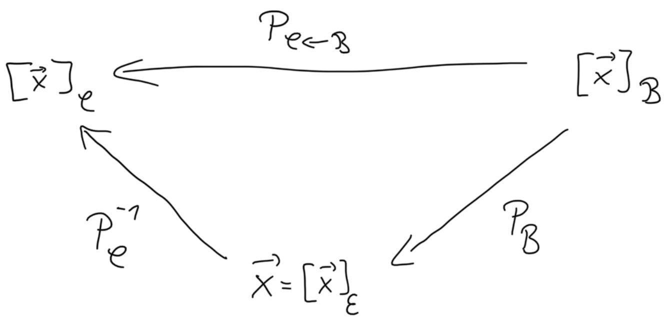



FIGUR 3. Skifte mellom basiser

**Basisskift i $\mathbb{R}^n$.** Den sidste teorem viser hvordan man finner koordinatskiftematrise fra en basis $\mathcal{B}$ til en basis $\mathcal{C}$ hvis man har koordinater av vektorer i $\mathcal{B}$ i basisen $\mathcal{C}$. Her fokuserer vi på vektorrommet $\mathbb{R}^n$ og den følgende spørgesmål: Hvordan finner vi koordinatskiftematrisen hvis begge basiser $\mathcal{B}$ og $\mathcal{C}$ er representært i standard basisen? En mulighed vil være at skifte basis fra $\mathcal{B}$ til standardbasisen $\mathcal{E}$ med koordinatskiftematrisen $P_{\mathcal{B}}$ og efter det skifte standardbasisen til basisen $\mathcal{C}$ med den inverse matrise $P_{\mathcal{C}}^{-1}$ (Se Fig. 4). Det viser at

$$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = P_{\mathcal{C}}^{-1}P_{\mathcal{B}}.$$

Men der finnes en beder mulighet som er vises i et eksempel:




FIGUR 4. Koordinatskiftematrisen som komposition av to koordinatsavbildninger.

**Eksempel.** La

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix},$$

og la $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ og $\mathcal{C} = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2\}$ være to basiser for $\mathbb{R}^2$. Hva er koordinateskiftematrisen fra $\mathcal{B}$ til $\mathcal{C}$? For at finne koordinatskiftematrisen skal vi regne ut koordinatevektorer $\left[\vec{b}_1\right]_{\mathcal{C}}$ og $\left[\vec{b}_2\right]_{\mathcal{C}}$. Det gør vi med at løse to lineære likningssystemer like som vi har set før. Vi kan gør en lille trick og løs dem sammen med at radredusere

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \vec{c}_1 & \vec{c}_2 & \vec{b}_1 & \vec{b}_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & -9 & -5 \\ -4 & -5 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \end{array}\right).$$

Vi kan se at

$$\left[\vec{b}_1\right]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ og } \left[\vec{b}_2\right]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Koordinatskiftematrisen fra $\mathcal{B}$ til $\mathcal{C}$ er

$$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \left(\left[\vec{b}_1\right]_{\mathcal{C}}, \left[\vec{b}_2\right]_{\mathcal{C}}\right) = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Denne eksempel viser et generalt metode at finne koordinatsskiftematriser: Hvis vi har basiser $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ og $\mathcal{C} = \{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n\}$ for vektorrommet $\mathbb{R}^n$ så kan vi radredusere

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \vec{c}_1 & \cdots & \vec{c}_n & \vec{b}_1 & \cdots & \vec{b}_n \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c} I_n & P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} \end{array}\right),$$

hvor den venstre side bliver til $I_n$, dvs. $n \times n$ identitesmatrisen

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Hvis vi har radredusert venstre siden til $I_n$ så er højre siden like med koordinatsskiftematrisen $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$. La oss se på et eksempel mere:

**Eksempel.** La

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \end{pmatrix}, \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix},$$

og la $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ og $\mathcal{C} = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2\}$ være to basiser for $\mathbb{R}^2$. Hva er koordinatsskiftematriser $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ og $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$. Med metoden fra sidste eksempel finner vi

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \vec{c}_1 & \vec{c}_2 & \vec{b}_1 & \vec{b}_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} -7 & -5 & 1 & -2 \\ 9 & 7 & -3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -3/2 \\ 0 & 1 & -3 & 5/2 \end{array}\right),$$

og det viser at

$$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -3/2 \\ -3 & 5/2 \end{pmatrix}.$$

På sammen måde finner vi

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{c}_1 & \vec{c}_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -7 & -5 \\ -3 & 4 & 9 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \end{array}\right),$$

og det viser at

$$P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Vi kan sjekke at de to matriser er inverse for hinanden, dvs. at

$$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Like som vi har diskutert før er der en annen mulighed for at regne ud disse matriser. Vi kan bestemme koordinateskiftematriser $P_{\mathcal{B}}$ og $P_{\mathcal{C}}$ som skifter koordinater fra de to basiser til standard basisen. Med dem har vi

$$P_{\mathcal{B}}\,[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}} = \overrightarrow{x}$$

og

$$P_{\mathcal{C}}\,[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{C}} = \overrightarrow{x}.$$

De sidste likninger impliserer også at

$$P_{\mathcal{C}}^{-1}\overrightarrow{x} = [\overrightarrow{x}]_{\mathcal{C}} \quad \text{og} \quad P_{\mathcal{B}}^{-1}\overrightarrow{x} = [\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}}.$$

Vi finner at

$$P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = P_{\mathcal{B}}^{-1}P_{\mathcal{C}} \quad \text{og} \quad P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = P_{\mathcal{C}}^{-1}P_{\mathcal{B}}.$$

Metoden vi har lært før er hurtiger enn at regne koordinatskiftematriser ut på denne måde!