EGENVEKTORER OG EGENVERDIER (SEC. 5.1.)

Seksjon 5 handler om egenvektorer og egenverdier og hvordan de kan brukes til at forstå lineære transformasjoner. Vi kommer også til at snakke om den største likningssystem som nogensinden blev løst og hva egenvektorer har at gøre med Google og den moderne internet. I de første seksjoner snakker vi om egenvektorer og egenverdier av matriser. Sener kommer vi til at se at disse konsepter er mere generalt. La oss starte med en eksempel:

Eksempel. La A være 2×2-matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hvordan transformerer A vektorerne i $\mathbb{R}^2$? Vi kan regne ut nogen eksempler. Hvis

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

så finner vi

$$A\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

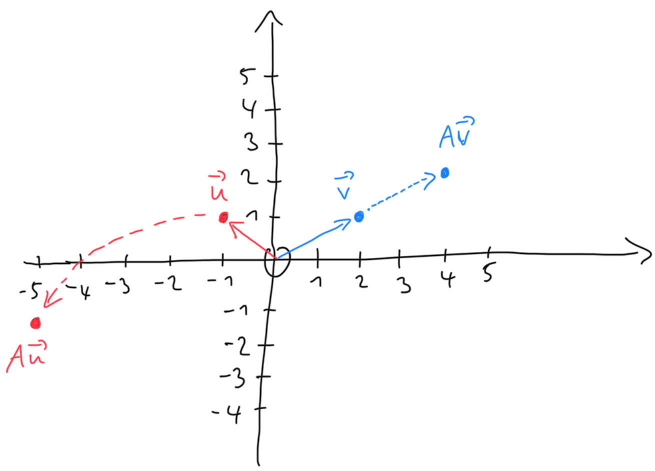
Men hvis

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

så finner vi

$$A\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Se Fig. 1 for en illustrasjon.



FIGUR 1. Transformasjon med matrisen $A = [3, -2; 1, 0]$.

Vektoren $\overrightarrow{v}$ i den sidste eksempel bliver bare skalert under transformasjonen! Vektorer som har denne egenskab kalles for egenvektorer og skaleringsfaktoren (tallet 2 i eksemplen) kalles for egenverdi. Egenvektorer og egenverdier til en lineære transformasjon sier meget om hvordan transformasjonen forholder sig.La oss definer hva vi mener præcis med order egenvektor og egenverdi.

Definisjon. *La A være en $n \times n$-matrise. Et tall λ kalles en* egenverdi *for A dersom det finnes en vektor $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$ slik at*

$$A\overrightarrow{x} = \lambda \overrightarrow{x}.$$

Vektoren $\overrightarrow{x}$ kalles for egenvektoren *til egenverdien λ.*

Nu kan vi se på nogen eksempler for at illustrere egenvektorer og egenverdier:

Eksempel. La

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix},$$

og

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}, \text{ og } \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Er $\overrightarrow{u}$ og $\overrightarrow{v}$ egenvektorer for A? Vi kan bare regne ut og sjekke det. Først ser vi at

$$A\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 20 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Det viser at $\overrightarrow{u}$ er en egenvektor til egenverdi $\lambda = -4$. Vi kan også regne ut at

$$A\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 11 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix},$$

for noget tall λ. Det viser at $\overrightarrow{v}$ er ikke en egenvektor for matrisen A.

Husk at $\overrightarrow{0}$ er aldrig en egenvektor (ellers ville jo hvert tall λ være en egenverdi og definisjonen ville være ikke særlig godt). Men tallet $\lambda = 0$ kan være en egenverdi som man kan se f.eks. med matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

hvor vi har

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Generelt er 0 en egenverdi for en matrise A hvis og kun hvis det lineære likningssystem $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ har et ikke-trivielt løsning $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$. Derfor har vi det næste teorem:

Teorem. *Tallet $\lambda = 0$ er en egenverdi for en matrise A hvis og kun hvis A er ikke inverterbar.*

I følge av kurset ville vi ofte komme i situasjoner hvor vi ville at en matrise har en bestemt egenverdi. Hvordan finner vi en egenvektor i denne situasjon?

Eksempel. Ta igen matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix},$$

fra den sidste eksempel. Vi ved allerede at $\lambda = -4$ er en egenverdi for A. Tallet $\lambda = 7$ er også en egenverdi. Hvordan finner vi egenvektorer for denne egenverdi? Efter definisjonen er alle egenvektorer $\overrightarrow{x}$ til egenverdi $\lambda = 7$ løsninger til det lineære likningssystem

$$(A - 7I_2)\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}.$$

Vi har lært hvordan vi løser det! Med radreduksjon finner vi

$$(A - 7I_2) = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi finner at

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

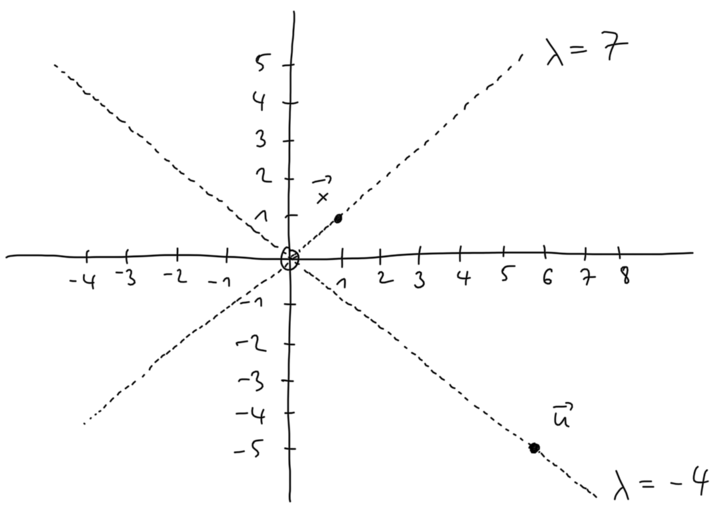
løser likningssystemet. Vi ser også at rank $(A - 7I_2) = 1$ og derfor er nulitet$(A - 7I_2) = 1$ efter rankteoremet, dvs. nullrommet er 1-dimensjonalt og vi konkludere at alle egenvektorer for A til egenverdien $\lambda = 7$ er i underrommet

$$\text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

Underrommet av egenvektorer til en egenverdie λ fortjener en definisjon:

Definisjon. *La A være en $n \times n$-matrise med en egenverdi λ.* Egenrommet *til λ er underrommet av $\mathbb{R}^n$ som er utespennt av alle egenvektorer til λ. Alternativt: Egenrommet til λ er Nul$(A - \lambda I_n)$.*

Se Fig. 2 for en illustrasjon av egenrommer for matrisen A fra den sidste eksempel.



FIGUR 2. Matrisen $A = [1, 6; 5, 2]$ har to 1-dimensjonale egenrommer for egenverdier $\lambda = -4$ og $\lambda = 7$.

La oss se på et mere interessant eksempel:

Eksempel. La

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Finne egenrommet til egenverdien $\lambda = 2$ for A. Egenrommet er $\mathrm{Nul}(A - 2I_3)$ og vi kan regne ut at

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Med radreduksjon finner vi

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

For at finne en basis til nullrommet av disse matrise vælger vi to frie variabler. Generalle løsninger $\overrightarrow{x}$ til den lineære likningssystem $(A - 2I_3)\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ er

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

og vi har

$$\mathrm{Nul}((A - 2I_3)) = \mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

Egenrommet er 2-dimensjonalt, dvs. det er en plane i $\mathbb{R}^3$.

Dimensjonen av egenrommet til en egenverdi λ kalles også for *geometriske multiplisitet* av egenverdien λ. Vi snakker om det sener i flere detaljer men vi kan allerede nu spørge vilke dimensjoner egenrommer kan ha for en $n \times n$ matrise?

Generelt er det ikke så nemt at finde egenverdier for en matrise ved hånden. Men der er nogen matriser hvor man kan læse egenverdier fra deres indganger. Det næste teorem giver en eksempel:

Teorem 1. *Hvis A er en* triangulær *$n \times n$-matrise, så er egenverdier tallene på diagonalen.*

Bevis. For illustrasjon ta

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix},$$

og vi regner ut at

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Efter definisjonen er λ en egenverdi for A hvis og kun hvis $\mathrm{Nul}\,(A - \lambda I_3) \neq \{\overrightarrow{0}\}$. Hvis λ er ikke lige med en av tallene a_{11}, a_{22}, a_{33} på diagonalen så er hvert søyle av $A - \lambda I_3$ en pivotsøyle. Derfor er $\mathrm{rank}\,(A - \lambda I_3) = 3$ og $\mathrm{nulitet}\,(A - \lambda I_3) = 0$ efter rankteoremet. Det betyder at nullrommet for $A - \lambda I_3$ er like med $\{\overrightarrow{0}\}$ og at λ er ikke en egenverdi for A. Det samme argument virker for dimensjoner større end 3 og for A som er nedre triangulært. $\square$

Eksempel. Egenverdier for

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

er $3, 0,$ og 2. Egenverdier til

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

er 4 og 1.

En viktigt spesialtilfald av det sidste teorem er diagonale matriser:

Korollar 1. *Hvis A er en* diagonal *$n \times n$-matrise, så er egenverdier tallene på diagonalen.*

Det næste teorem viser en viktigt egenskab av egenvektorer til forskjellige egenverdier.

Teorem 2. *La A være en $n \times n$-matrise. Hvis $\overrightarrow{x}_1, \ldots, \overrightarrow{x}_k$ er egenvektorer for* distinkte *egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ så er $\{\overrightarrow{x}_1, \ldots, \overrightarrow{x}_k\}$ lineært uavhengig.*

Bevis. Bevis ved motsigelse! Anta at mængden $\{\overrightarrow{x}_1, \ldots, \overrightarrow{x}_k\}$ er lineær avhengig. Efter Teorem 5 finnes der en delmængde av $\{\overrightarrow{x}_1, \ldots, \overrightarrow{x}_k\}$ som er en basis til span$\{\overrightarrow{x}_1, \ldots, \overrightarrow{x}_k\}$. Efter muligvis omorganisere rækkefølgen av vektorer kan vi anta at $\overrightarrow{x}_1, \ldots, \overrightarrow{x}_p$ er denne basis og fordi mængden $\{\overrightarrow{x}_1, \ldots, \overrightarrow{x}_k\}$ er lineær avhengig har vi $p < k$ (ellers ville $\{\overrightarrow{x}_1, \ldots, \overrightarrow{x}_k\}$ være jo basisen og mængden vil være lineær uavhengig). Fordi $\overrightarrow{x}_1, \ldots, \overrightarrow{x}_p$ er en basis til span$\{\overrightarrow{x}_1, \ldots, \overrightarrow{x}_k\}$ finner vi $c_1, \ldots, c_p \in \mathbb{R}$ så at

$$c_1 \overrightarrow{x}_1 + \cdots + c_p \overrightarrow{x}_p = \overrightarrow{x}_{p+1} \qquad (*)$$

Hvis vi nu anvender A har vi

$$\lambda_1 c_1 \overrightarrow{x}_1 + \cdots + \lambda_p c_p \overrightarrow{x}_p = A\left(c_1 \overrightarrow{x}_1 + \cdots + c_p \overrightarrow{x}_p\right) = A\overrightarrow{x}_{p+1} = \lambda_{p+1} \overrightarrow{x}_{p+1}. \tag{1}$$

Men hvis vi multiplisere $(*)$ med tallet λ_{p+1} finner vi at

$$\lambda_{p+1} c_1 \overrightarrow{x}_1 + \cdots + \lambda_{p+1} c_p \overrightarrow{x}_p = \lambda_{p+1} \overrightarrow{x}_{p+1}. \tag{2}$$

Vi kan trekke likning (2) fra likning (1) og det viser at

$$(\lambda_1 - \lambda_{p+1}) c_1 \overrightarrow{x}_1 + \cdots + (\lambda_p - \lambda_{p+1}) c_p \overrightarrow{x}_p = 0.$$

Men det er en ikke trivielle lineær avhengighetsrelation (fordi egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ var antaet distinkte). Det er en motsigelse siden $\overrightarrow{x}_1, \ldots, \overrightarrow{x}_p$ er en basis og derfor lineær uavhengig.

□

Teoremet har et nemt korollar:

Korollar 2. *En $n \times n$-matrise har maksimalt n distinkte egenverdier.*

Bevis. Hvis der ville være flere enn n distinkte egenverdier så ville tilsvarende egenvektorer være lineær uavhengig. Men der er ikke flere enn n lineær uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^n$. □

Matlab/Octave: Til sidst kan vi snakke om hvordan man bruker numeriske software for at finne egenverdier og egenvektorer. For at regne ut egenvektorer og egenverdier i Matlab eller Octave brukes funksjonen "eig". Se for eksempel på matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix},$$

og husk at egenverdier er -4 og 7. Det kan vi regne ut med Matlab eller Octave på den her måde:

```
>> A=[1,6;5,2];eig(A)

ans =
        -4
         7
```

For at får egenvektorer kan samme funksjon brukes med

```
>> A=[1,6;5,2];[vectors,D]=eig(A)

vectors =

    -0.7682    -0.7071
     0.6402    -0.7071

E =
    -4    0
     0    7
```

Her er "vectors" en matrise med egenvektorer som søyler, og "E" er en diagonal matrise med egenverdier på diagonalen (første søyle i "vectors" er egenvektor til den egenverdi i første diagonalindgang av "E"). Vi kommer til at se lidt sener hvorfor Matlab og Octave representærer egenvektorer og egenverdier på den måde. Husk at egenvektorer er ikke unike og Matlab/Octave kan nogen gang finne vektorer som ser ikke så pænt ut. Det kan også ske at Matlab eller Octave finner komplekse egenverdier og egenvektorer. Det snakker vi om sener.