DETERMINANTER OG DEN KARAKTERISTISKE LIKNINGEN (SEC. 5.2.)

Der er to aspekter av den grundleggende teori av egenverdier for matriser. Vi har allerede set den geometriske aspekt som betrakter egenvektorer og deres avhengighets relationer. Nu skal vi se på den algebraiske aspekt som ta egenverdier som løsninger av et bestemt polynomlikning som kalles den *karakteristiske likning.* Vi kan se først på et eksempel:

Eksempel. Finne egenverdier for matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Efter definisjonen er egenverdier alle tall λ så at likningen

$$(A - \lambda I_2)\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0},$$

har ikke trivielle løsninger $\overrightarrow{x}$. Efter den invertible matrise teorem er det ekvivalente til at finne alle tall λ så at matrisen

$$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & -6-\lambda \end{pmatrix},$$

er ikke inverterbar. Dere har lært i kurset "Kalkulus og lineære algebra" at denne matrise er *ikke* inverterbar hvis og kun hvis determinanten er null! Det betyder at egenverdier er løsninger til likningen

$$\det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & -6-\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Husk at determinanten til en 2×2 matrise er

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

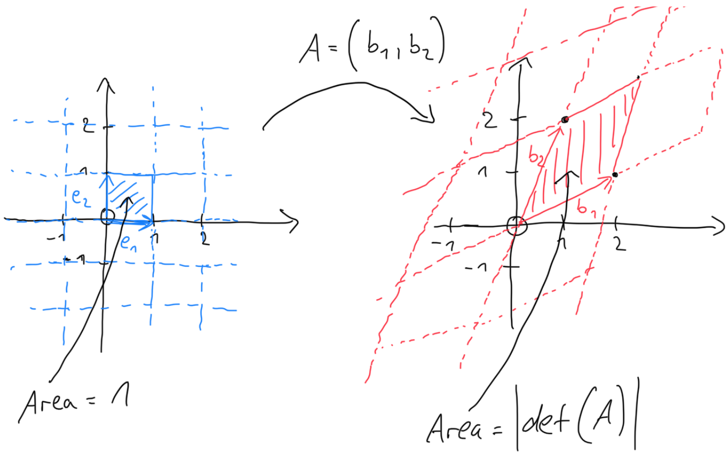
Vi kan regne ut at

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & -6-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-6-\lambda) - 3 \cdot 3 = \lambda^2 + 4\lambda - 2 = (\lambda+7)(\lambda-3).$$

Det viser at egenverdier er $\lambda = -7$ og $\lambda = 3$.

Polynomiet $\lambda^2 + 4\lambda - 2$ i det sidste eksempel kalles for *karakteristiske polynomiet* til matrisen A, og likningen $\lambda^2 + 4\lambda - 2 = 0$ kalles for *karakteristiske likning.* Vi merker at karakteristiske polynomiet har grad 2 og det er det sammen som dimensjonen av matrisen. Det er ikke en tilfaldighed og det henger sammen med egenskaber av determinanter. Vi starter med en lille repetisjon av determinanters egenskaber.

Repetisjon: Determinanter. Determinanten er en funksjon som ta $n \times n$-matriser og giver et tall. Der finnes forskjellige muligheder for at tænke om determinanter. Vi kommer mest til at tænke algebraisk om den, men der finnes en geometriske variant som dere har set før. Hvis man interpreter søyler av en matrise som vektorer så er determinanten det signert volumet av den parallellepipedum utspennt av disse vektorer. Tegn av determinanten bestemmes med hvordan parallelepipedumen er orientert i rummet. Vi kan visualiser det med de konsepter som vi har lært før (Se Fig. 1). Hvis vi ta matrisen som en basis transformasjon svarer absolutverdien av determinanten til hvor meget volumer ændrer sig under denne koordinateskift (det har dere måske set før i transformasjonsformlen for integraler).



FIGUR 1. Determinanten og area under koordinateskift.

Eksempler i dimensjoner 2 og 3 er:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

og

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Generalt ha vi efterfølgende definisjon:

Definisjon. *Determinanten er rekursivt definert.*

(1) For $n = 2$. Hvis A er en 2×2 matrise med indgang a_{ij} så har vi

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

(2) For $n > 2$. Hvis A er en $n \times n$ matrise med indgang a_{ij} så har vi

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}\det(A^{(1,1)}) - a_{12}\det(A^{(1,2)}) + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det(A^{(1,n)}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A^{1,j}), \end{aligned}$$

hvor matrisen $A^{1,j}$ for $j \in \{1, \ldots, n\}$ konstrueres fra A med at strege ut rad 1 og søyle j.

I Fig. 2 kan vi se hvordan det virker i den 3×3 tilfald hvor vi finner formlen oppefra. Man kan faktisk bruke hvert rad eller søyle for at regne ut determinanten like som i definisjonen før!

$$
\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}
&= a_{11} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
&\quad - a_{12} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
&\quad + a_{13} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
&= a_{11} \cdot \left(a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32} \right) \\
&\quad - a_{12} \left(a_{21} a_{33} - a_{31} a_{23} \right) \\
&\quad + a_{13} \left(a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31} \right) \\
&= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} \\
&\quad - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{31} a_{23} \\
&\quad + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} \, .
\end{aligned}
$$

FIGUR 2. Formel til 3×3 determinanten fra definisjon.

Teorem (Cofaktor expansjon)**.** *Hvis A er en $n \times n$ matrise så har vi*

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A^{(i,1)}) + (-1)^{i+2} a_{i2} \det(A^{(i,2)}) + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det(A^{(i,n)}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{i,j}),
\end{aligned}
$$

for hvert $i \in \{1, \ldots, n\}$, og

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A^{(1,j)}) + (-1)^{2+j} a_{2j} \det(A^{(2,j)}) + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det(A^{(n,j)}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{i,j}),
\end{aligned}
$$

for hvert $j \in \{1, \ldots, n\}$. Her er $A^{i,j}$ matrisen som man får fra A med at strege ut rad i og søyle j.

La oss se et eksempel:

Eksempel.

(1) Regne ut determinanten til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hvis bruker første søyle med teoremet før så regner vi

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11} \det(A^{1,1}) - a_{21} \det(A^{2,1}) + a_{31} \det(A^{3,1}) \\ &= 2 \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 4 \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 0 \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

(2) I praksis kan man ofte valge en god rad eller søyle så at regningen bliver nemmer. For eksempel for matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix},$$

er det smart at bruke den annen søyle for regningen, dvs. vi bruker den annen formel i cofaktor expansjonen med $j = 2$. Så får man

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{1+2} a_{1,2} \det\left(A^{1,2}\right) + (-1)^{2+2} a_{2,2} \det\left(A^{2,2}\right) + (-1)^{3+2} a_{3,2} \det\left(A^{1,2}\right) \\ &= (-1) \cdot 2 \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = -2(28 - 30) = 4, \end{aligned}$$

fordi $a_{2,2} = a_{3,2} = 0$.

Determinanter har en masse interessante egenskaber. Nogen av dem sammler vi i det efterfølgende teorem:

Teorem 3 (Egenskaber av determinanten)**.** *La A og B være $n \times n$ matriser. Vi ha de følgende:*

(1) A er invertibel hvis og kun hvis $\det(A) \neq 0$.
(2) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
(3) $\det(A^T) = \det(A)$.
(4) Hvis A er en triangulær matrise så er determinanten produkt av tallene på diagonalen.
(5) At erstatte en rad med summen a raden og multiplumet av en annen rad ændrer ikke determinanten.
(6) At bytte to rader eller to søyler skifter tegn av determinanten.
(7) At multiplisere en rad eller søyle med et tall multipliserer determinanten med dette tall.

Den karakteristiske likningen. Vi starter med definisjonen:

Definisjon. *Polynomet $det(A - \lambda I_n)$ kalles det* karakteristisk polynomet *til A og likningen*

$$det(A - \lambda I_n) = 0$$

kalles den karakteristiske likningen *til A.*

Fordi λ er en egenverdi hvis og kun hvis matrisen $A - \lambda I_n$ er ikke invertibel har vi det efterfølgende teorem:

Teorem. *Et tall λ er en egenverdi til en $n \times n$-matrise A hvis og kun hvis*

$$det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Vi har en generelle metode for at finne egenverdier og egenvektorer:

(1) Løs likningen $\det(A - \lambda I_n) = 0$ for at finne egenverdiene.
(2) For hver egenverdi λ, radreduser $A - \lambda I_n$ for at finne egenvektorene.

La oss se på et eksempel mere:

Eksempel. Hva er karakteristiske likning for matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi bruker Theorem 3 og regner ut at

$$\det(A - \lambda I_4) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)^2(3-\lambda)(1-\lambda).$$

Karakteristiske likningen er

$$(5-\lambda)^2(3-\lambda)(1-\lambda) = 0,$$

eller expandert

$$\lambda^4 - 14\lambda^3 + 68\lambda^2 - 130\lambda + 75 = 0.$$

Løsninger til denne likning er egenverdier $5, 3,$ og 1 som vi kan osgså læse direkt fra diagonalen av tiangluære matrisen A. .

Vilken grad har karakteristiske polynomiet? Hvis vi kigger tilbake til definisjonen av determinanten så kan man vise med induksjon at graden av det karakteristiske polynomiet for en $n \times n$ matrise er n. Et viktigt teorem i Algebra sier at et polynomiet med grad n har præcis n roter hvis man tillader komplekse tall (vi snakker om komplekse egenverdier lidt sener) som roter og hvis man taller roter flere gang hvis tilhørende faktorer i faktoriseringen av polynomiet forkommer med en potens. I eksemplen før har vi havt polynom likningen

$$\lambda^4 - 14\lambda^3 + 68\lambda^2 - 130\lambda + 75 = (5-\lambda)^2(3-\lambda)(1-\lambda) = 0,$$

og vi ser at der er tre forskjellige roter men roten 5 skal man talle to gang fordi faktoren $(5-\lambda)$ har en potens 2. Vi sier at der er 4 roter *med multiplisitet.* La oss se et eksempel mere:

Eksempel. Vi kan faktoriser et polynomiet med grad 6 som

$$\lambda^6 - 4\lambda^5 - 12\lambda^4 = \lambda^4(\lambda^2 - 4\lambda - 12) = \lambda^4(\lambda - 6)(\lambda + 2).$$

Roterne er $\lambda = 0$ med multiplisitet 4, $\lambda = 6$ med multiplisitet 1 og $\lambda = -2$ med multiplisitet 1. Vi har 6 roter med multiplisitet og 6 er like med graden av polynomiet.

I konteksten av egenverdier har vi de følgende to definisjoner:

Definisjon. *La A være en $n \times n$ matrise med egenverdien λ.*

- *Det* algebraiske multiplisitet *av λ er multiplisitet av roten λ i*

$$\mathit{det}(A - \lambda I_n) = 0.$$

- *Det* geometriske multiplisitet *av λ er dimensjonen til egenrommet:*

$$\mathit{nulitet}(A - \lambda I_n) = \mathit{dim}\left(\mathit{Nul}(A - \lambda I_n)\right).$$

Similære matriser. Når man studerer generelle objekter i matematik så er det ofte hjælpsom at finne relasjoner mellom dem som bevarer egenskaber man er interessert i. Vi er like nu meget interessert i egenverdier av matriser og en transformasjon for matriser som bevarer egenskaber av egenverdier er den så kallte similaritætstransformasjon: Vi "sandwicher" en matrise A mellom en matrise P og deres inverse (hvor vi anta at P er inverterbar). Vi har følgende definisjon:

Definisjon. *Vi sier at to $n \times n$ matriser A og B er* similære *dersom det finnes en invertibel matrise P slik at*

$$B = P^{-1}AP.$$

Similaritæt er en *symmetriske* relasjon mellom matriser A og B. Dvs. at A er similære til B hvis og kun hvis B er similære til A, og vi kan bare sie at A og B er similære. Beviset for denne symmetri er nemt: Hvis $B = P^{-1}AP$ for en invertibel matrise P så er $A = PBP^{-1} = Q^{-1}BQ$ hvis vi setter $Q = P^{-1}$. Den næste teorem illusterer hvorfor similaritet er et viktigt konsept:

Teorem 4. *Hvis A og B er similære har de de sammen egenverdier med samme algebraiske og geometriske multiplisitet.*

Bevis. Hvis $B = P^{-1}AP$ så har vi

$$B - \lambda I_n = P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P = P^{-1}(A - \lambda I_n)P.$$

Teorem 3 viser at

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I_n) &= \det\left(P^{-1}(A - \lambda I_n)P\right) \\ &= \det(P^{-1})\det(A - \lambda I_n)\det(P) \\ &= \det(P^{-1})\det(P)\det(A - \lambda I_n) \\ &= \det(P^{-1}P)\det(A - \lambda I_n) \\ &= \det(I_n)\det(A - \lambda I_n) = \det(A - \lambda I_n), \end{aligned}$$

hvor vi har brukt at $\det(I_n) = 1$. Det viser at karakteristiske polynomier for A og B er de sammen og derfor er egenverdier med deres algebraiske multiplisiteter de sammen.

La λ være en egenverdi for B med $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$ som basis for egenrommet, dvs. at geometriske multiplisitet av λ for B er like med k. Da er

$$B\vec{x}_j = \lambda\vec{x}_j,$$

for hvert j. Siden $B = P^{-1}AP$ finner vi at

$$P^{-1}AP\vec{x}_j = \lambda\vec{x}_j,$$

og hvis vi multipliserer begge sider med P har vi

$$AP\vec{x}_j = \lambda P\vec{x}_j,$$

for hvert j. Det viser at $\{\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k\}$ med $\vec{y}_j = P\vec{x}_j$ er egenvektorer for A for egenverdien λ. Fordi P er inverterbar er $\{\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k\}$ lineær uavhengig! Hvorfor det? Anta at vi har en lineær avhengighetsrelasjon

$$c_1\vec{y}_1 + \cdots + c_k\vec{y}_k = \vec{0},$$

men så har vi jo

$$\vec{0} = c_1\vec{y}_1 + \cdots + c_k\vec{y}_k = c_1P\vec{x}_1 + \cdots + c_kP\vec{x}_k = P(c_1\vec{x}_1 + \cdots + c_k\vec{x}_k).$$

Hvis vi ganger begge sidder med matrisen P^{-1} så finner vi

$$\vec{0} = P^{-1}\vec{0} = P^{-1}P(c_1\vec{x}_1 + \cdots + c_k\vec{x}_k) = c_1\vec{x}_1 + \cdots + c_k\vec{x}_k.$$

Fordi $\{\overrightarrow{x}_1, \dots, \overrightarrow{x}_k\}$ er en basis (for egenrommet av λ) er de lineær uavhengig og vi finner at $c_1 = \cdots = c_k = 0$. Det viser at $\{\overrightarrow{y}_1, \dots, \overrightarrow{y}_k\}$ er lineær uavhengig og at geometriske multiplisitet av egenverdien λ i A er større enn k (det geometriske multiplisitet av λ for B). Hvis vi skifter roller av A og B så viser sammen argument at de geometriske multiplisiteter av λ for A og B er de sammen.

$\square$