DIAGONALISERING (SEC. 5.3.)

Hvis vi ha en $n \times n$ matrise A, hvordan regner vi potensen A^k for høje tall k? Det efterfølgende eksempel illustrer hvordan man kan gør det nemt hvis matrisen A er similær til en diagonal matrise.

Eksempel.

(1) Hvis
$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$
så kan vi regne ut at
$$D^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix},$$
og generalt at
$$D^k = \begin{pmatrix} 5^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix},$$
for hvert $k \geq 1$.

(2) Hvis
$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix},$$
hvordan regner vi ut hva A^k er? Vi først ser at $A = PDP^{-1}$ for
$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$
og
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$
Vi kan sjekke det med at bruke
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$
og vi finner at
$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = A.$$
Vi kan nu se at
$$\begin{aligned} A^2 &= (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \\ &= PD(P^{-1}P)DP^{-1} \\ &= PDI_2DP^{-1} = PD^2P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$
hvor vi har brukt at $P^{-1}P = I_2$. Denne muster har vi også for $k = 3$:
$$\begin{aligned} A^3 &= (PDP^{-1})A^2 \\ &= (PDP^{-1})(PD^2P^{-1}) \\ &= PD(P^{-1}P)D^2P^{-1} = PD^3P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Og generelt finner vi

$$A^k = PD^kP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Det betyder at vi kan regne ut A^k ret effektivt hvis A er similært til en diagonal matrise!

Vi starter med en definisjon:

Definisjon. *La A være en $n \times n$ matrise. Hvis vi kan skrive $A = PDP^{-1}$ for en invertibel matrise P og en diagonal matrise D kalles A* diagonaliserbar.

Hvornår er en $n \times n$ matrise diagonaliserbar? Svaret finner vi nu:

Teorem 5 (Diagonaliseringsteoremet)**.**

- *En $n \times n$ matrise A er diagonaliserbar hvis og kun hvis den har n lineær uavhengige egenvektorer.*
- *Hvis $A = PDP^{-1}$ for en diagonal matrise D så er*

$$P = (\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_n),$$

med lineær uavhengige egenvektorer $\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_n$ som søyler, og

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

har egenverdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ på diagonalen som svarer til egenvektorerne i P (dvs. de har det sammen rækkefølge).

Teoremet sier at en $n \times n$ matrise er diagonaliserbar hvis og kun hvis der finnes en basis for $\mathbb{R}^n$ som består av egenvektorer til A. La oss vis teoremet:

Bevis. Anta at $A = PDP^{-1}$ for en diagonalmatrise

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

og en invertibel matrise

$$P = (\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_n),$$

med søyler $\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_n \in \mathbb{R}^n$. Hva kan vi si om tallene $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ og vektorer $\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_n$? Fordi $A = PDP^{-1}$ finner vi at $AP = PD$. Vi kan regne ut at

$$AP = A(\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_n) = (A\overrightarrow{v}_1, \ldots, A\overrightarrow{v}_n),$$

med søylerne $A\overrightarrow{v}_1, \ldots, A\overrightarrow{v}_n$, og

$$PD = (\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = (\lambda_1\overrightarrow{v}_1, \ldots, \lambda_n\overrightarrow{v}_n).$$

med søylerne $\lambda_1\overrightarrow{v}_1, \ldots, \lambda_n\overrightarrow{v}_n$. Fordi $AP = PD$ har vi $A\overrightarrow{v}_j = \lambda_j\overrightarrow{v}_j$ og vi konkluderer at λ_j er en egenverdi for A med egenvektor $\overrightarrow{v}_j$ for hvert $j \in \{1, \ldots, n\}$. Matrisen P er invertibel hvis og kun hvis søylerne $\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_n$ er lineær uavhengig og at A har n lineær uavhengige egenvektorer hvis A er diagonaliserbar. Det viser også den spesielle form a matriserne D og P fra den annen punkt i teoremet.

Til sidst skal vi vise at hvis A har n lineær uavhengige egenvektorer så er den diagonaliserbar. Anta at det er tilfalled for egenvektorer $\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_n \in \mathbb{R}^n$ og skriv dem i søylerne av en matrise

$$P = (\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_n) .$$

Matrisen P er invertibel (efter inverterbare matrise teorem fra Seksjon 4.5.) fordi alle n søyler er lineær uavhengig (så har den jo rang n og nullitet 0). Hvis $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ er tilsvarende egenverdier til egenvektorerne $\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_n$ så kan vi regne igen at

$$AP = (A\overrightarrow{v}_1, \ldots, A\overrightarrow{v}_n) = (\lambda_1 \overrightarrow{v}_1, \ldots, \lambda_n \overrightarrow{v}_n) = PD,$$

for diagonal matrisen

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} .$$

Fordi $AP = PD$ finner vi $A = PDP^{-1}$ med at multiplisere likningen med P^{-1} fra høyre. Vi konkluderer at matrisen A er diagonaliserbar hvis den har n lineær uavhengige egenvektorer. □

La oss se på et eksempel:

Eksempel. Diagonaliser matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} .$$

Vi følger 4 trin:

(1) **Finne egenverdier for A:** Vi regner ut karakteristiske polynomiet

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ -3 & -5-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2. \end{aligned}$$

Vi finner at A har egenverdier $\lambda = 1$ og $\lambda = -2$ (som er roter til karakteristiske polynomiet).

(2) **Finne lineær uavhengige egenvektorer til de egenverdier:** For at finne lineær uavhengige egenvektorer kan vi faktisk finne basiser til de forskjellige egenrommer! Med metoder som vi har set før finner vi at egenrommet til egenverdien $\lambda = 1$ er

$$\mathrm{Nul}\,(A - 1 \cdot I_3) = \mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

Egenrommet til egenverdien $\lambda = -2$ er

$$\mathrm{Nul}\,(A + 2 \cdot I_3) = \mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

Fordi egenverdier $\lambda = 1$ og $\lambda = -2$ er forskjellig ved vi fra Teorem 2 i seksjon 5.1 at mængden

$$\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

er en mængde av lineær uavhengige egenvektorer.

(3) **Konstruere P fra egenvektorer:** Vi skriver lineær uavhengige egenvektorer som søyler i matrisen P. Her får vi

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4) **Konstruere diagonalmatrisen D fra egenverdier:** Vi skriver egenverdier som diagonalen i en diagonalmatrise. Husk at vi skal bruke den sammen rækkefølge som vi har brukt for egenvektorer! Her får vi

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vi kan nu sjekke at

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

som er like med

$$PD = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Det viser at $A = P^{-1}DP$ og A er diagonaliserbar.

Der finnes matriser som er ikke diagonaliserbar! Fordi vi har bare å gjøre med reelle egenverdier kan det ske at karakteristiske polynomiet har nogen komplekse roter. I denne tillfall er matrisen ikke diagonaliserbar i $\mathbb{R}^n$ (men den kan stadig være diagonaliserbar i $\mathbb{C}^n$. Men det lærer dere sener). La oss se på et mere relevant eksempel:

Eksempel. Er matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

diagonaliserbar? Vi regner ut at den karakteristiske polynom er

$$\det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 & 3 \\ -4 & -6-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2.$$

Det er præcis det sammen karakteristiske polynomiet som i eksemplen før! Egenverdier er $\lambda = 1$ og $\lambda = -2$. Igen kan vi bestemme egenrommet til egenverdien $\lambda = 1$ som

$$\text{Nul}\,(A - 1 \cdot I_3) = \text{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

Men egenrommet til egenverdien $\lambda = -2$ er

$$\text{Nul}\,(A + 2 \cdot I_3) = \text{span}\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}.$$

Egenrommet til egenverdien $\lambda = -2$ er kun 1-dimensjonal! Det betyder at der ikke finnes 3 lineær uavhengige egenvektorer for A. Efter Teorem 5 er matrisen A *ikke* diagonaliserbar.

Vi har set at selv om matriser har det sammen karakteristiske polynom og egenverdier kan den ene være diagonaliserbar og den annen ikke. Der er et nemt tilstrekkelig kriterium for en matrise at være diagonaliserbar.

Teorem 6. *Hvis en $n \times n$ matrise har n forskjellige egenverdier så er den diagonaliserbar.*

Bevis. Teorem 2 i seksjon 5 sier at egenvektorer til forskjellige egenverdier er lineær uavhengig. Hvis en $n \times n$ matrise har n forskjellige egenverdier så er der en mængde av n lineær uavhengige egenvektorer. Efter basisteoremet (Teorem 13 i seksjon 4) er n lineær uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^n$ en basis for $\mathbb{R}^n$. Derfor finnes der en basis av egenvektorer for matrisen A og Teorem 5 viser at A er diagonaliserbar. □

Det sidste teorem giver kun en tilstrekkelig kriterium. Det er *ikke* nødvendigt! Matriserne i de sidste to eksempler er 3×3 matriser og de har kun 2 forskjellige egenverdier. I den første eksempel var matrisen stadigvæk diagonaliserbar! Et meget nemt eksempel er identitetsmatrisen

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

som har kun en egenverdi $\lambda = 1$. Men selvfølgelig er den diagonaliserbar. La oss se på et eksempel mere:

Eksempel. Er matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

diagonaliserbar? Matrisen er triangulær og har egenverdier 5, 0, og -2. De er alle forskjellig! Efter Teorem 6 er matrisen diagonaliserbar.

Matriser med ikke forskjellige egenverdier. Vi har set at en $n \times n$ matrise med mindre enn n forskjellige egenverdier kan stadigvæk være diagonaliserbar. Kan vi forstår lidt bedre hvordan det funger? I den sidste eksempel har vi set at matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

er ikke diagonaliserbar. Grunnen til det var at matrisen har to egenverdier med egenrommer som er begge 1-dimensjonalt. Derfor var der ikke nok egenvektorer som er lineær uavhengig. Denne eksempel illustrerer at om en matrise er diagonaliserbar avhenger på geometriske multiplisitet av egenverdier, dvs. dimensjoner av deres egenrommer. For at forstå det bedre viser vi det følgende teorem:

Teorem. *Geometriske multiplisitet av en egenverdi er altid mindre en algebraiske multiplisitet av den sammen egenverdi.*

Bevis. Anta at en $n \times n$ matrise A har en egenverdi λ_1 med geometriske multiplisitet k. Strategien er at vise at A er similær til en matrise B som har formen

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & X \\ & & \lambda_1 & \\ \hline & \mathbf{0} & & Y \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 I_k & X \\ \hline \mathbf{0} & Y \end{array}\right) \qquad (*)$$

hvor X og Y er nogen matriser av den rigtige størrelse (hva de er præcise er ikke viktigt for beviset) og $\mathbf{0}$ er en matrise som kun har 0er i indganger.

La oss anta et øjeblik at A er similært til en matrise B med formen som i $(*)$. Hvorfor viser det at geometriske multiplisitet av λ er mindre enn algebraiske multiplisitet av λ? Husk fra Teorem 4 i seksjon 5 at similære matriser har de sammen egenverdier med de sammen algebraiske og geometriske multiplisiteter. Derfor har egenverdien λ for B også geometriske multiplisitet k. Det er nu ret nemt at delvis regne ut karakteristiske polynomiet til B. Hvis vi bruker cofaktor expansjon (se notater fra sidste forlæsning) k gange med søyler 1 til k får vi

$$\begin{aligned}\det(B-\lambda I_n) &= \det\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1-\lambda & & & \\ & \ddots & & X \\ & & \lambda_1-\lambda & \\ \hline & \mathbf{0} & & Y-\lambda I \end{array}\right) \\ &= (\lambda_1-\lambda)^k \det(Y-\lambda I).\end{aligned}$$

Fordi expansjonen av et polynom i lineær faktorer er unike og den karakteristiske polynom for B inneholder en faktor $(\lambda_1-\lambda)^k$ konkluderer vi at algebraiske multiplisitet av λ for matrisen B er mindst k som er den geometriske multiplisitet av λ for B. Som vi har sagt før viser Teorem 4 i seksjon 5 at matrisen A som er similær til B har de sammen egenverdier med de sammen algebraiske og geometriske multiplisiteter. Derfor har egenverdien λ for A også en algebraiske multiplisitet som er mindst k og vi er færdig.

Til sidst skal vi vise at A er faktisk similær til en matrise B med formen som i $(*)$. La oss anta at $\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k\}$ være en basis for egenrommet av λ_1 (som har geometriske multiplisitet k). Teorem 12 i seksjon 4 sier at vi kan utvide mængden til en basis av $\mathbb{R}^n$. La $\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k,\vec{w}_{k+1},\dots,\vec{w}_n\}$ være så en basis. Husk at vektorerne $\vec{w}_{k+1},\dots,\vec{w}_n$ har ikke noget at gøre med matrisen A. De behøver ikke at være egenvektorer for den følgende argument. Vi starter med at definere en invertibel matrise

$$P = (\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k,\vec{w}_{k+1},\dots,\vec{w}_n)\,,$$

med basisvektorer som søyler. I den næste trinn definerer vi en matrise

$$B = \left(\lambda_1\vec{e}_1,\dots,\lambda_1\vec{e}_k,P^{-1}A\vec{w}_{k+1},\dots,P^{-1}A\vec{w}_n\right),$$

med nogen merklige søyler og hvor $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_k$ er vektorerne fra standard basisen til $\mathbb{R}^n$. Like som vi har set før er det ikke så viktigt hva de sidste søyler i B er (så længe matrisen er similær til A). Men vi kan allerede nu se at matrisen B har formen som i $(*)$. Nu skal vi bar sjekke at denne matrise er similær til A. Vi regner ut at

$$AP = (A\vec{v}_1,\dots,A\vec{v}_k,A\vec{w}_{k+1},\dots,A\vec{w}_n) = (\lambda_1\vec{v}_1,\dots,\lambda_1\vec{v}_k,A\vec{w}_{k+1},\dots,A\vec{w}_n)$$

fordi $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k$ er egenvektorer til egenverdien λ_1 for A. Men vi kan også regne ut at

$$\begin{aligned}PB &= \left(\lambda_1P\vec{e}_1,\dots,\lambda_1P\vec{e}_k,PP^{-1}A\vec{w}_{k+1},\dots,PP^{-1}A\vec{w}_n\right)\\ &= (\lambda_1\vec{v}_1,\dots,\lambda_1\vec{v}_k,A\vec{w}_{k+1},\dots,A\vec{w}_n)\,,\end{aligned}$$

hvor vi har brukt at $PP^{-1}=I_n$ og at $P\vec{e}_j=\vec{v}_j$ for hvert $j\in\{1,\dots,k\}$ fordi $\vec{v}_j$ er den $j$te søyle i P. Vi konkluderer at $AP=PB$ og hvis vi multipliser denne likning med P^{-1} fra venstre så får vi

$$B = P^{-1}AP.$$

Det viser at A og B er similære og beviset er færdig med argumentet som vi har diskutert før.

□

Nu får vi et teorem ved at kombinere den sidste teorem og teorem 5:

Teorem. *La A være en $n \times n$ med forskjellige egenverdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. Matrisen A er diagonaliserbar hvis og kun hvis summen av dimensjoner av egenrommer er like med n, og dette skjer hvis og kun hvis den karakteristiske polynom faktoriserer fullstandig i lineær faktorer (dvs. der er ikke nogen komplekse egenverdier) og geometriske multiplisitet av hvert egenverdi er like med algebraiske multiplisitet til den sammen egenverdi.*

Bevis. Hvis A er diagonaliserbar så viser Teorem 5 at den er similær til en diagonal matrise med egenverdier (med algebraiske multiplisiteter) på diagonalen. Karakteristiske polynomiet av denne diagonal matrise faktoriserer fullstandig i lineær faktorer og hvert egenverdi har de sammen algebraiske og geometriske multiplisitet. Teorem 4 fra seksjon 5 viser nu at det sammen er sant for matrisen A. Det viser den ene rettning.

For den anden rettning kan vi anta at den karakteristiske polynom av A faktoriserer fullstandig i lineær faktorer og at den geometriske multiplisitet av hvert egenverdi er like med algebraiske multiplisitet til den sammen egenverdi. Fordi summen av algebraiske multiplisiteter er n (det er jo graden av den karakteristiske polynom) så er det sammen sant for de geometriske multiplisiteter. Men nu kan vi bygge en basis for $\mathbb{R}^n$ med at ta kolleksjonen av basiser til de enkelte egenrommer. Vi har set i Teorem 2 fra seksjon 5.1 at egenvektorer til forskjellige egenverdier er lineær uavhengig og derfor er denne kolleksjon også linear uavhengig. Fordi kolleksjonen innholder n lineær uavhengige vektorer så former de en basis for $\mathbb{R}^n$ efter basisteoremet (Teorem 13 i seksjon 4). □