

## Quiz og repetisjon

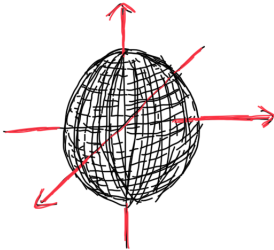
26. oktober 2022

# Transformasjon av enhetsfæren

Hvordan transformerer enhetsfæren

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x}\| = 1\}$$

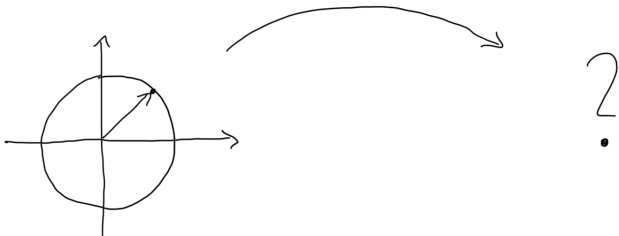
under en transformasjon  $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ . for en matrise  $A$



Hvordan transformerer enhets sirklen

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\vec{x}\| = 1\}$$

under en transformasjon  $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ . for en  $2 \times 2$  matrise  $A$

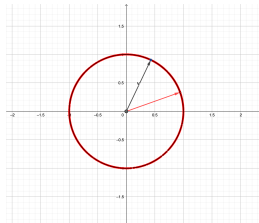
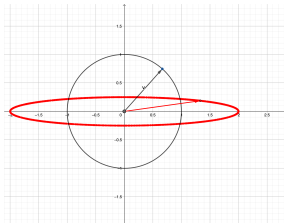
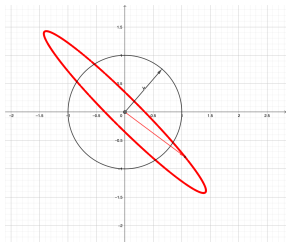


## Hvilken matrise produserer hvilket billed?

1  $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

2  $U = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & \sin(\frac{\pi}{4}) \\ -\sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}$

3  $UDU^T = \begin{pmatrix} 1.125 & -0.875 \\ -0.875 & 1.125 \end{pmatrix}$



## Ortogonal matriser

### Definisjon

En  $n \times n$  matrise  $U$  k elles ortogonal hvis

$$U^{-1} = U^T.$$

### Example

Rotasjonsmatriser like som

$$U = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & \sin(\frac{\pi}{4}) \\ -\sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}.$$

**Ortogonal matriser bevarer Euklidiske normen:**

$$\|U\vec{x}\|^2 = \langle U\vec{x}, U\vec{x} \rangle = \langle \vec{x}, U^T U\vec{x} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \|\vec{x}\|^2,$$

for alle  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ .

## Symmetriske matriser

### Teorem (Spektralteoremet)

La  $A$  være en symmetriske  $n \times n$  matrise. Der finnes en ortonormal basis  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  av egenvektorer og vi har

$$A = UDU^T,$$

for den ortogonale matrise

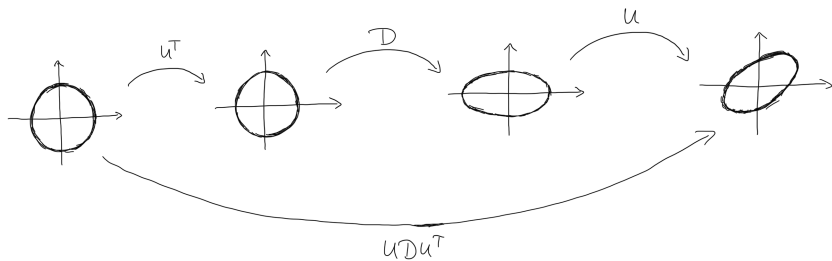
$$U = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n),$$

og den diagonale matrise

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

med egenverdier  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

Hvordan  $A = UDU^T$  produserer en ellipse



Alle symmetriske matriser  
produserer ellipser!



Hva med andre matriser?

## Eksempel: En $2 \times 3$ matrise

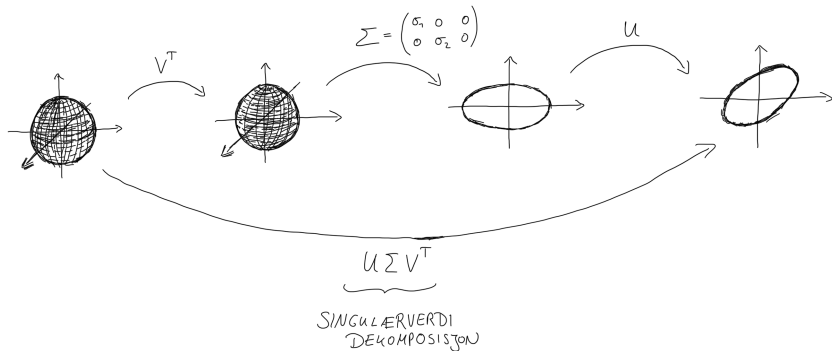
Ta matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{pmatrix},$$

og transformasjonen  $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ .

Faktum: Alle matriseser produserer  
ellipser!

## Mekanismen bagved ellipsen



Det skal vi lær i dag.

**TO THE BLACKBOARD!**