OPPGAVESETT NR. 10 (UKE 44)

Obs: Alle tall referer til oppgaver i 6. utgave. I parentes finnes tilsvarende oppgaver i 5. utgave.

Anbefalte oppgaver

Anbefalte oppgaver løses i åpne grupper.

- **Seksjon 7.2:** 2, 4, 8, 16
- **Seksjon 7.3:** 2, 6, 10, 12

Hjemmeoppgaver

Hjemmeoppgaver løses hjemme. Husk at løsninger til hjemmeoppgaver finnes i boka!

- **Seksjon 7.2:** 7, 15, 35 (27)
- **Seksjon 7.3:** 5, 13, 15

For selvstudium

Oppgave 1. Vis at for enhver symmetrisk reell matrise $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ er følgende betingelser likeverdige:

(a) A er positiv semidefinit (vi også sier da at A er *positiv*);
(b) $A = B^2$ for en symmetrisk reell matrise B;
(c) $A = B^T B$ for en reell $n \times n$ matrise B;
(d) $A = B^T B$ for noen m og en reell $m \times n$ matrise B;
(e) det finnes vektorer $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ slik at $a_{ij} = v_i \cdot v_j$;
(f) det finnes et indreproduktrom V og vektorer $v_1, \dots, v_n \in V$ slik at $a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$.

Vis også at A er positiv definit hvis og bare hvis A er positiv semidefinit og vektorene $v_1, \dots, v_n$ i (e) (eller (f)) er lineært uavhengige.

Oppgave 2. Vis at

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \lambda_3 \\ & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \lambda_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_{n-2} & \lambda_{n-1} & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_n - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^2.$$

Oppgave 3. Bevis *Sylvester-kriteriet for positive definite matriser*: en symmetrisk reell matrise $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ er positiv definit hvis og bare hvis

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0 \quad \text{for alle} \quad k = 1, \dots, n.$$

Hint: bruk induksjon og reduser til matriser i Oppgave 2.

Oppgave 4. Betrakt følgende betingelse $(*)$ for en symmetrisk reell matrise $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$:

$$\det \begin{pmatrix} a_{i_1 i_1} & \dots & a_{i_1 i_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k i_1} & \dots & a_{i_k i_k} \end{pmatrix} \geq 0 \quad \text{for alle} \quad k = 1, \dots, n \quad \text{og} \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n.$$

(a) Vis at hvis A tilfredstiller $(*)$, da har vi at $\det(A + tI) > 0$ for alle $t > 0$.

(b) Bevis *Sylvester-kriteriet for positive matriser*: A er positiv (eller positiv semidefinit) hvis og bare hvis $(*)$ holder. Hint: bruk (a) og Oppgave 3, og la $t \to 0$.