OPPGAVESETT NR. 11 (UKE 45)

Obs: Alle tall referer til oppgaver i 6. utgave. I parentes finnes tilsvarende oppgaver i 5. utgave.

Anbefalte oppgaver

Anbefalte oppgaver løses i åpne grupper.

- **Seksjon 5.3:** 30 (24), 34 (28)
- **Seksjon 5.6:** 6, 12
- **Seksjon 6.5:** 4, 12, 30 (22)

Hjemmeoppgaver

Hjemmeoppgaver løses hjemme. Husk at løsninger til hjemmeoppgaver finnes i boka!

- **Seksjon 5.3:** 31 (25), 37 (31)
- **Seksjon 5.6:** 15, 17
- **Seksjon 6.5:** 13, 27 (19), 29 (21)

For selvstudium

Oppgave 1. En *bilineær form* på et vektorrom V er en funksjon $B\colon V \times V \to \mathbb{R}$ slik at

$$B(u+v,w) = B(u,w) + B(v,w), \quad B(w,u+v) = B(w,u) + B(w,v),$$

$$B(\alpha u, v) = \alpha B(u,v), \quad B(u, \alpha v) = \alpha B(u,v).$$

En bilineær form kalles *symmetrisk*, hvis $B(u,v) = B(v,u)$.

(a) Vis at bilineære former på $\mathbb{R}^n$ er gitt ved

$$B(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

og B er symmetrisk hvis og bare hvis matrisen $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ er symmetrisk.

En funksjon $Q\colon V \to \mathbb{R}$ kalles en *kvadratisk form* hvis $Q(v) = B(v,v)$ for en bilineær form B.

(b) Vis at hvis $Q(v) = B(v,v)$ er en kvadratisk form, da kan vi altid anta at B er symmetrisk, og da er B entydig bestemt av Q:

$$B(u,v) = \frac{1}{4}(Q(u+v) - Q(u-v)).$$

(c) Vis at en funksjon $Q\colon V \to \mathbb{R}$ er en kvadratisk form hvis og bare hvis

$$Q(\alpha v) = \alpha^2 Q(v) \quad \text{og} \quad Q(u+v) + Q(u-v) = 2Q(u) + 2Q(v).$$

Oppgave 2. Anta at er V er et vektorrom og $W \subset V$ er et underrom. Definer en ekvivalensrelasjon på V ved

$$u \sim v \Leftrightarrow u - v \in W.$$

(a) Sjekk at dette faktisk er en ekvivalensrelasjon.

Betrakt mengden $V/_\sim$ av ekvivalensklasser, dvs. $V/_\sim$ består of symboler $[v]$ $(v \in V)$ slik at $[u] = [v]$ hvis og bare hvis $u \sim v$. Denne mengden betegnes som V/W og kalles *kvotienten* til V ved W.

(b) Vis at V/W er et vektorrom med operasjoner

$$[u] + [v] = [u + v], \quad \alpha[v] = [\alpha v].$$

(c) Vis at hvis $\{u_1, \dots, u_n\}$ er en basis for V slik at $\{u_1, \dots, u_m\}$ er en basis for W, da er $\{[u_{m+1}], \dots, [u_n]\}$ en basis for V/W.

(d) Vis at hvis V er et indreproduktrom og $W \subset V$ er et endeligdimensjonalt underrom, da har vi en lineær isomorfi $W^\perp \cong V/W$, $v \mapsto [v]$.