OPPGAVESETT NR. 12 (UKE 46)

Anbefalte oppgaver

Anbefalte oppgaver løses i åpne grupper.
Eksamen 2012

Hjemmeoppgaver

Hjemmeoppgaver løses hjemme.
Eksamen 2016

For selvstudium

Oppgave 1. Anta at Q er en kvadtratisk form på et endeligdimensjonalt vektorrom V (se Oppgavesett 11). Vi kan velge en basis $v_1, \ldots, v_n$ for V og se på Q som en form på $\mathbb{R}^n$. La $A = (a_{ij})_{i,j}$ være den symmetriske matrisen til denne formen, så

$$Q(x_1 v_1 + \cdots + x_n v_v) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

La n_+, n_-, n_0 være antall egenverdier (med multiplisiteter) til A som er strengt positive, strengt negative og null, henholdsvis. Vi har $n_0 + n_+ + n_- = n$. Trippelen (n_0, n_+, n_-) kalles *signaturen* til Q. Målet i denne oppgaven er å vise *Sylvesters-treghetsloven*: signaturen er uavhengig av vårt valg av en basis for V.

Merk: For matriser betyr Sylvesterstreghetsloven følgende. Hvis A er en symmetrisk matrise og C er en invertibel matrise, da har matrisene A og $C^T AC$ samme antall egenverdier som er strengt positive, strengt negative og null.

La B være den symmetriske bilineære formen som definerer Q. *Kjernen* til B er definert ved

$$\ker B = \{v \in V \mid B(u, v) = B(v, u) = 0 \text{ for alle } u \in V\}.$$

Vi sier at B er *ikke-degenerert* hvis $\ker B = 0$.

(a) Vis at $n_0 = \dim(\ker B)$, så er n_0 bestemt av Q.

Den symmetriske bilineære formen B (og den kvadratiske formen Q) kalles *positiv definit* hvis $B(v, v) > 0$ for alle $v \neq 0$. (Merk at i denne terminologien er et indreprodukt på V en positiv definit symmetrisk bilineær form.) Den kalles *negativ definit* hvis $B(v, v) < 0$ for alle $v \neq 0$.

(b) Anta at $W_1, W_2 \subset V$ er underrom og $\dim W_1 < \dim W_2$. Vis at det finnes $v \in W_2$ slik at $v \neq 0$ og $B(u, v) = 0$ for alle $u \in W_1$. Bruk dette for å vise at alle maksimale underrom $V_+ \subset V$ slik at Q er positiv definit på V_+ har samme dimensjon.

(c) Vis at n_+ er dimensjonen til et bestemt (når en basis er valgt) maksimalt underrom $V_+ \subset V$ slik at Q er positiv definit på V_+.

Kombinasjonen av (b) og (c) viser at n_+ er definert av Q. Det samme er også sant for n_- (erstatt Q med $-Q$). Dette avslutter beviset til Sylvesterstreghetsloven.

(d) Gi et eksempel som viser at det kan være forskjellige maksimale underrom $V_+ \subset V$ slik at Q er positiv definit på V_+. Så, i motsetning til n_0, er ikke tallene $n_\pm$ dimensjonene til entydig bestemte underrom av V.

Oppgave 2. Anta at Q_1 og Q_2 er kvadratiske former på endeligdimensjonale vektorrom V_1 og V_2. Vis at det finnes en lineær isomorfi $T\colon V_1 \to V_2$ slik at $Q_2(Tv) = Q_1(v)$ for alle $v \in V_1$ hvis og bare hvis Q_1 og Q_2 har samme signatur.