UKE 6

Obs: Alle tall referer til oppgaver i den 6. utgave. I parentes finner i tilsvarende oppgaver i den 5. utgave.

Annbefalte oppgaver

Annbefalte oppgaver løses i apne gruppene.

- **Sektion 5.9:** 10,30

Tidligere eksamensoppgaver:

Oppgave 1. La A være 3×3 matrisen gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 7/2 & -2 & 1/2 \\ 3/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Du får oppgitt at A har en egenverdi $\lambda_2 = 1$, og at $\overrightarrow{v}_1 = (1, 1, 1)$ og $\overrightarrow{v}_3 = (1, 3, 6)$ er egenvektorer for A.

(1) Finn en egenvektor $\overrightarrow{v}_2$ for A tilhørende egenverdien λ_2. Bestem også egenverdiene for A som svarer til egenvektorene $\overrightarrow{v}_1$ og $\overrightarrow{v}_3$.
(2) Begrunn at A er diagonaliserbar og angi en 3×3 invertibel matrise P og en 3×3 diagonalmatrise D som er slik at $A = PDP^{-1}$.
(3) Betrakt det dynamiske systemet $\overrightarrow{x}_{k+1} = A\overrightarrow{x}_k$ der $k = 0, 1, 2, \cdots$. Anta at $\overrightarrow{x}_0 = (1, 0, -3)$. Begrunn at $\overrightarrow{x}_k$ konvergerer mot en vektor $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$ når $k \to \infty$ og angi $\overrightarrow{x}$.
(4) Betrakt igjen det dynamiske systemet $\overrightarrow{x}_{k+1} = A\overrightarrow{x}_k$ der $k = 0, 1, 2, \cdots$. Bestem alle startvektorene $\overrightarrow{x}_0$ som er slik at $\overrightarrow{x}_k$ vil konvergere mot nullvektoren når $k \to \infty$. Begrunn svaret.

Oppgave 2. La

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

og la $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være lineæravbildningen som har A som sin standardmatrise. La $\mathcal{B} = \overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2$ være den basisen for $\mathbb{R}^2$ gitt ved

$$\overrightarrow{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi betraker $\mathcal{B}$ som ordnet i den oppgitte rekkefølgen.

(1) Beregn koordinatmatrisen $B = [T]_{\mathcal{B}}$ til T med hensyn på $\mathcal{B}$, og skriv B på formen rR_ϕ der r er et positivt tall og R_ϕ er standardmatrisen til en rotasjon i R^2 om origo med en vinkel ϕ (mot klokka).
(2) Begrunn at A ikke er diagonaliserbar når den betraktes som en reell matrise. Angi de komplekse egenverdiene til A og en tilhørende kompleks egenvektor for hver av disse.
(3) Matrisen A er opplagt invertibel og vi setter $C = A^{-1}$. La $x_0 \in \mathbb{R}^2$ og betrakt det dynamiske systemet gitt ved $x_{k+1} = Cx_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Begrunn at $x_k \to 0$ når $k \to \infty$.

Oppgave 3. La

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Vis at $\overrightarrow{v}_1 = (-1, 1, 0)$ og $\overrightarrow{v}_2 = (-1, 0, 1)$ er egenvektorer for A. Vis også at 2 er en egenverdi for A.
(2) Begrunn at A er diagonaliserbar. Finn egenverdiene til A^{10}.
(3) Finn den generelle løsningen av diff.likning systemet

$$\overrightarrow{x}'(t) = A\overrightarrow{x}(t),$$

der $\overrightarrow{x}(t) \in \mathbb{R}^3$ for alle $t \in \mathbb{R}$. Bestem deretter løsningen som tilfredstiller at $\overrightarrow{x}(0) = (1, -1, 1)$.

Hjemmeoppgaver

Hjemmeoppgaver løses hjemme. Husk at løsninger til hjemmeoppgaver findes i bogen!

- **Sektion 5.9:** 25

Desuden lave alle tidligere hjemmeoppgaver som du ikke har gjort og lave et strukturert oversigt over de viktiste resultater og konsepter vi har lært i sektion 4 og sektion 5. Hvis noget er uklart spørge forlæserer eller tutorer.

For sjov

Oppgave 4 (Majorisering)**.** For hvert vektor $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ definerer vi $\overrightarrow{x}^{\downarrow}$ som vektoren med samme indganger som $\overrightarrow{x}$ men ordnet i faldende rækkefølge. For eksempel hvis

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

så er

$$\overrightarrow{x}^{\downarrow} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Vi sier at en vektor $\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$ majoriserer en vektor $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ hvis

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^{\downarrow} \leq \sum_{i=1}^{k} y_i^{\downarrow},$$

holder for hvert $k \in \{1, \ldots, n\}$ og hvis

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{\downarrow} = \sum_{i=1}^{n} y_i^{\downarrow}.$$

Vi skriver $\overrightarrow{x} \prec \overrightarrow{y}$ hvis $\overrightarrow{y}$ majoriserer $\overrightarrow{x}$.

(1) Vis at

$$\begin{pmatrix} 1/n \\ 1/n \\ \vdots \\ 1/n \end{pmatrix} \prec \overrightarrow{x} \prec \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

for alle sannsynlighedsvektorer $\overrightarrow{x}$.

(2) En $n \times n$ matrise A kalles dobbel stokastisk hvis begge matriser A og A^T er stokastisk, dvs. hvis alle indganger i A er positiv og summen av hvert søyle og hvert rad er 1. Vis at en $n \times n$ matrise A er dobbel stokastisk hvis og kun hvis

$$A\overrightarrow{x} \prec \overrightarrow{x},$$

for alle $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$.