OPPGAVESETT NR. 7 (UKE 40)

Obs: Alle tall referer til oppgaver i 6. utgave. I parentes finnes tilsvarende oppgaver i 5. utgave.

Anbefalte oppgaver

Anbefalte oppgaver løses i åpne grupper.

- **Seksjon 6.1:** 14, 22 (20d), 28 (20e), 32 (24)
- **Seksjon 6.7:** 4, 6, 8, 14

Hjemmeoppgaver

Hjemmeoppgaver løses hjemme. Husk at løsninger til hjemmeoppgaver finnes i boka!

- **Seksjon 6.1:** 5, 11, 17, 31 (23), 33 (25)
- **Seksjon 6.7:** 1, 9, 11

For selvstudium

En *norm* på et vektorrom V er en funksjon $\|\cdot\|\colon V \to [0, +\infty)$ slik at

(1) $\|\alpha v\| = |\alpha|\,\|v\|$ for alle $v \in V$ og $\alpha \in \mathbb{R}$;
(2) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ for alle $u, v \in V$ (*trekantulikheten*);
(3) $\|v\| = 0$ hvis og bare hvis $v = 0$.

Vi sier da at $(V, \|\cdot\|)$ er et *normert vektorrom*.

Oppgave 1. Vis at følgende definerer normerte vektorrom:

(1) $V = \mathbb{R}^n$, $\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$;
(2) $V = \mathbb{R}^n$, $\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$;
(3) $V = C[a,b]$, $\|f\|_\infty = \max_{t \in [a,b]} |f(t)|$;
(4) $V = C[a,b]$, $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt$.

Oppgave 2. Anta at $(V, \|\cdot\|)$ er et normert vektrorrom. Vis at normen defineres av et indreprodukt på V hvis og bare hvis den tilfredsstiller *parallellogramloven*:

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 \quad \text{for alle} \quad u, v \in V.$$

Er det normer i Oppgave 1 som er definert av indreprodukter?