OPPGAVESETT NR. 9 (UKE 43)

Obs: Alle tall referer til oppgaver i 6. utgave. I parentes finnes tilsvarende oppgaver i 5. utgave.

Anbefalte oppgaver

Anbefalte oppgaver løses i åpne grupper.

- **Seksjon 6.6:** 2, 6 (ikke i utgave 5), 14 (8)
- **Seksjon 7.1:** 12, 20, 36 (30)
- **Seksjon 7.4:** 10, 18, 20

Hjemmeoppgaver

Hjemmeoppgaver løses hjemme. Husk at løsninger til hjemmeoppgaver finnes i boka!

- **Seksjon 6.6:** 11 (5), 15 (9)
- **Seksjon 7.1:** 19, 35 (29)
- **Seksjon 7.4:** 13, 17, 23

For selvstudium

Oppgave 1.

(a) Vis at hvis $P\colon \mathbb{R}^n \to V$ er den ortogonale projeksjonen på et underrom $V \subset \mathbb{R}^n$ (m.h.p. prikkproduktet), da er $I - P$ den ortogonale projeksjonen på $V^\perp$.

(b) Anta at V_1 og V_2 er underrom av $\mathbb{R}^n$ og betrakt de ortogonale projeksjonene $P_1\colon \mathbb{R}^n \to V_1$ og $P_2\colon \mathbb{R}^n \to V_2$. Vis at $V_1 \perp V_2$ hvis og bare hvis $P_1P_2 = 0$ (og derfor også $P_2P_1 = 0$: husk fra oppgavesett 8 at $P_i^T = P_i$). Vi sier da at P_1 og P_2 er *ortogonale til hverandre*.

(c) Betrakt ortogonale projeksjoner $P_i\colon \mathbb{R}^n \to V_i$, $i = 1, \dots, k$. Vis at

$$Q = P_1 + \cdots + P_k$$

er en ortogonal projeksjon hvis og bare hvis projeksjonene P_i er ortogonale til hverandre, og da er Q den ortogonale projeksjonen på underrommet utspent av V_i for $i = 1, \dots, k$. Hint: induksjon.

Oppgave 2. Vis følgende *spektral dekomposisjon* for symmetriske matriser: hvis A er en reell symmetrisk matrise, da finnes det entydig bestemte tall $\lambda_1 < \cdots < \lambda_k$ og ortogonale projeksjoner $P_1, \dots, P_k$ slik at

$$I = P_1 + \cdots + P_k, \qquad A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k.$$

Nemlig, $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} = \operatorname{Sp} A$ og P_i er den ortogonale projeksjonen på egenrommet tilhørende λ_i.

Projeksjonene P_i kalles de *spektrale projeksjonene* til A.