$\boxed{\text{12.9 Anvendelse: Lineære differensiallikningssystemer}}$ (Lay 5.7)

(Se også seksjon 14.5 i KOLA)

(1) Gitt DL-systemet

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) \end{cases} \quad \text{dvs.} \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

der $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$. Kan skrive: $\underline{\vec{x}\,' = A \cdot \vec{x}}$

(2) Finn egenverdier $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (med multiplisitet) og egenbasis $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ for A. (Metoden forutsetter at dette eksisterer.)

(3) La $P = [\vec{u}_1 \cdots \vec{u}_n]$. Da er $\underline{A = PDP^{-1}}$, der

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

La $\vec{y} = P^{-1}\vec{x}$. Da fås

fordi P er konstant

$$\begin{aligned} \vec{y}\,' &= P^{-1} \cdot \vec{x}\,' = P^{-1}(A\vec{x}) \\ &= P^{-1}(PDP^{-1})\vec{x} \\ &= \underbrace{(P^{-1}P)}_{I} D (P^{-1}\vec{x}) = D \cdot \vec{y} \end{aligned}$$

dvs. $\begin{bmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

Altså: $y_i' = \lambda_i y_i$ for $i = 1, \dots, n$

Dette gir $\quad y_i = c_i\, e^{\lambda_i t} \quad$ for $i = 1, \dots, n$.

Det vil si
$$\vec{y} = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Dette gir, fordi $\vec{x} = P\vec{y}$ (kan gå direkte hit fra (2))

$$\vec{x}(t) = P \cdot \vec{y}(t) = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 \cdots \vec{u}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{c_1 \vec{u}_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n \vec{u}_n e^{\lambda_n t}}}$$

(Generell løsning av vårt opprinnelige system $\vec{x}' = A\vec{x}$)

eks. 1
$$\begin{cases} x' = 5x + 8y \\ y' = -x - y \end{cases} \qquad \begin{aligned} x(0) &= -10 \\ y(0) &= 3 \end{aligned}$$

Løsn. (1) Systemet er

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

dvs. $\vec{x}\,' = A\vec{x}$ med $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

(2) Egenverdier for A

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 8 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-5) + 8$$
$$= \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

gir $\lambda = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \dfrac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$

Egenvektorer til $\lambda_1 = 3$

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \text{gir} \quad \begin{cases} 5a + 8b = 3a & \text{I} \\ -a - b = 3b & \text{II} \end{cases}$$

(II sier $a = -4b$
I sier det samme)

Basis: $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$

Egenvektorer til $\lambda_2 = 1$

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \text{gir} \quad \begin{cases} 5a + 8b = a & \text{I} \\ -a - b = b & \text{II} \end{cases}$$

(II sier $a = -2b$
I sier det samme)

Basis: $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(3) Generell løsning :

$$\vec{x}(t) = c_1 \cdot \vec{u}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot \vec{u}_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$= c_1 \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t}$$

Initialkrav :

$$\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 3 \end{bmatrix} = c_1 \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} e^{0} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{0}$$

Dette gir :

$$\begin{cases} -4c_1 - 2c_2 = -10 & \text{I} \\ c_1 + c_2 = 3 & \text{II} \end{cases}$$

II sier $c_2 = 3 - c_1$

I sier da $-4c_1 - 2(3 - c_1) = -10$

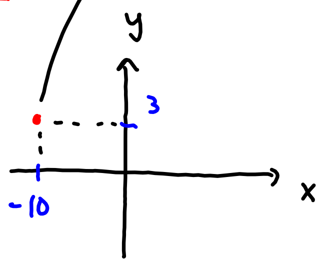
$$-4c_1 - 6 + 2c_1 = -10$$

$$4 = 2c_1 \, , \quad c_1 = 2$$

Så $c_2 = 3 - c_1 = 1$. Løsning :

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} -8 \\ 2 \end{bmatrix} e^{3t} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t}$$

Starter her ved $t=0$



Med andre ord :

$$\begin{cases} x(t) = -8e^{3t} - 2e^{t} \\ y(t) = 2e^{3t} + e^{t} \end{cases}$$

Sjekk:

$$x'(t) = -8 \cdot 3e^{3t} - 2e^{t} = \underline{-24e^{3t} - 2e^{t}}$$

$$\begin{aligned} 5x(t) + 8y(t) &= 5\left(-8e^{3t} - 2e^{t}\right) \\ &\quad + 8\left(2e^{3t} + e^{t}\right) \\ &= -40e^{3t} - 10e^{t} + 16e^{3t} + 8e^{t} \\ &= \underline{-24e^{3t} - 2e^{t}} \qquad \text{ok!} \end{aligned}$$

I vårt eksempel er begge egenverdiene positive, og origo blir en "repeller" ("frastøter"). Hvis begge egenverdiene hadde vært negative, ville alle løsningene

$$\left(x(t), y(t)\right)$$

nærmet seg origo $(0,0)$ når $t \to \infty$. Origo ville da vært en attraktor (attractor). En positiv og en negativ egenverdi vil gjøre origo til et sadelpunkt.