12.9 forts. Inhomogene DL-systemer

Finne generell løsning av et inhomogent DL-system

$$\vec{x}\,' = A\vec{x} + \vec{b} \qquad (A, \vec{b} \text{ konstante})$$

1. Finn en spesiell løsning $\vec{x}_s$ av systemet, f.eks. ved å lete etter en likevektsløsning:

$$\vec{x}_s\,' = A\vec{x}_s + \vec{b} = \vec{0}$$

2. Finn egenverdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ og egenbasis $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ for A.

3. Den generelle løsningen av det inhomogene systemet er da

$$\vec{x}(t) = c_1 \vec{u}_1 e^{\lambda_1 t} + \ldots + c_n \vec{u}_n e^{\lambda_n t} + \vec{x}_s(t)$$

Hvorfor virker metoden?

Teorem Anta at $\vec{x}_s$ oppfyller $\vec{x}_s' = A\vec{x}_s + \vec{b}$

Da vil en vektorfunksjon $\vec{x}_h$ løse det tilsvarende homogene systemet, dvs.

$$\vec{x}_h' = A\vec{x}_h$$

hvis og bare hvis $\vec{x} = \vec{x}_h + \vec{x}_s$ løser $\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{b}$.

Bevis Anta at $\vec{x}_h' = A\vec{x}_h$. La $\vec{x} = \vec{x}_h + \vec{x}_s$. Da:

$$\begin{aligned}\vec{x}' &= (\vec{x}_h + \vec{x}_s)' = \vec{x}_h' + \vec{x}_s' \\ &= A\vec{x}_h + (A\vec{x}_s + \vec{b}) \\ &= A(\vec{x}_h + \vec{x}_s) + \vec{b} = A\vec{x} + \vec{b}\end{aligned}$$

Omvendt, anta at $\vec{x} = \vec{x}_h + \vec{x}_s$ oppfyller $\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{b}$.

Da:

$$\begin{aligned}\vec{x}_h' &= (\vec{x} - \vec{x}_s)' = \vec{x}' - \vec{x}_s' \\ &= (A\vec{x} + \vec{b}) - (A\vec{x}_s + \vec{b}) \\ &= A\vec{x} + \vec{b} - A\vec{x}_s - \vec{b} = A(\vec{x} - \vec{x}_s) \\ &= A\vec{x}_h. \quad \square\end{aligned}$$

eks. Finn generell løsning av

$$\begin{cases} x' = 5x + 8y - 2 \\ y' = -x - y + 1 \end{cases}$$

Løsn. Systemet er $\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{b}$ der

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1. Vi prøver å finne en likevektsløsning $\vec{x}$, dvs. en løsning slik at $\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{b} = \vec{0}$, dvs.

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{dvs.} \quad \begin{cases} 5x + 8y - 2 = 0 & \text{I} \\ -x - y + 1 = 0 & \text{II} \end{cases}$$

II gir $x = 1 - y$

I gir da $5(1-y) + 8y - 2 = 0$, $5 - 5y + 8y = 2$

dvs. $3y = -3$, $y = -1$

Så $x = 1 - y = 2$

Tar da $\vec{x}_s(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ (konstant)

2. Har fra i går
3. Generell løsning:

$$x(t) = c_1 \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{Litt om DL-systemer med komplekse egenverdier}}$

(Dropper bevis her) (KOLA 14.5, Lay 5.7)

Gitt $\vec{x}' = A\vec{x}$, A reell matrise (som før)

① Finn egenverdiene til A.

② For hver reell egenverdi, finn en basis for det tilhørende egenrommet. Sett opp basisfunksjoner $\vec{u}e^{\lambda t}$ for hver basisvektor $\vec{u}$ i egenrommet til λ.

③ Hvis A har komplekse egenverdier, så opptrer de i konjugerte par $\lambda = a \pm ib$ (teorem 4.6.2 KOLA)

Finn en basis for egenrommet til $\lambda = a + ib$.

For hver basisvektor $\vec{u}$ får du den komplekse løsningsfunksjonen

$$\vec{z} = \vec{u}e^{\lambda t} = \vec{u}e^{(a+ib)t} = \vec{u}e^{at + i(bt)}$$

$$\boxed{e^{p+ki} \overset{def}{=} e^{p}(\cos k + i \sin k)} \quad \overset{\downarrow}{=} \vec{u}e^{at}(\cos bt + i \sin bt)$$

Finn realdelen og imaginærdelen til $\vec{z}$. Disse to blir basisfunksjoner.

④ Den generelle (reelle) løsningen til $\vec{x}' = A\vec{x}$ blir nå

$$\vec{x} = c_1\vec{u}_1 + \ldots + c_n\vec{u}_n \qquad (c_i \in \mathbb{R})$$

der $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ er basisfunksjonene samlet i ② og ③.

eks. Finne generell løsning av $\begin{cases} x' = 5x + y \\ y' = -5x + 3y \end{cases}$

1. Systemet er $\vec{x}' = A\vec{x}$ med

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

Egenverdier : $\lambda = 4 \pm 2i$ (ingen reelle egenverdi)

2. Ikke aktuell

3. Finne basis for egenrommet tilhørende $\lambda = 4 + 2i$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = (4+2i)\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$$

gir $\begin{cases} 5s + t = 4s + 2i \cdot s & \mathrm{I} \\ -5s + 3t = 4t + 2i \cdot t & \mathrm{II} \end{cases}$

I sier $t = -s + 2i \cdot s = (-1 + 2i)s$

II sier da $0 = 0$

Basis for egenrommet : $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1+2i \end{bmatrix}$

Kompleks løsningsfunksjon:

$$\vec{z} = \vec{u}\, e^{(4+2i)t} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1+2i \end{bmatrix} e^{4t}\left(\cos 2t + i \sin 2t\right)$$

Altså

$$\vec{z} = \begin{bmatrix} e^{4t}(\cos 2t + i\sin 2t) \\ (-1+2i)\cdot e^{4t}(\cos 2t + i \sin 2t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{4t}\cos 2t + i\, e^{4t}\sin 2t \\ (-1+2i)e^{4t}\cos 2t + i\cdot(-1+2i)e^{4t}\sin 2t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{4t}\cos 2t \\ -e^{4t}\cos 2t - 2e^{4t}\sin 2t \end{bmatrix}$$

$$+ i\cdot\begin{bmatrix} e^{4t}\sin 2t \\ 2e^{4t}\cos 2t - e^{4t}\sin 2t \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{dåp}}{=} \vec{u}_1 + i\,\vec{u}_2$$

4 Generell løsning:

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1\vec{u}_1 + C_2\vec{u}_2$$

$$= C_1 e^{4t}\begin{bmatrix} \cos 2t \\ -\cos 2t - 2\sin 2t \end{bmatrix} + C_2 e^{4t}\begin{bmatrix} \sin 2t \\ 2\cos 2t - \sin 2t \end{bmatrix}$$