$\boxed{\text{12.1 forts. (Lay 4.1)}}$

Definisjon: Basis

En samling S av vektorer i et vektorrom V kalles en basis for V hvis S er lineært uavhengig og $\mathrm{Span}\, S = V$

Teorem 3: Unikhet av basiskoeffisienter

V vektorrom, $\mathcal{B}$ basis for V. Anta at $\vec{v} \in V$ kan skrives

$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + \ldots + a_k \vec{v}_k = b_1 \vec{v}_1 + \ldots + b_k \vec{v}_k$$

der $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in \mathcal{B}$ er de samme i begge uttrykkene. Da er

$$a_i = b_i \quad \text{for} \quad i = 1, \ldots, k.$$

Bevis Vi får $(a_1 \vec{v}_1 - b_1 \vec{v}_1) + \ldots + (a_k \vec{v}_k - b_k \vec{v}_k) = \vec{0}$

$$(a_1 - b_1)\vec{v}_1 + \ldots + (a_k - b_k)\vec{v}_k = \vec{0}$$

Siden $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ er lineært uavhengige, må vi her ha

$$a_i - b_i = 0 \quad \text{for} \quad i = 1, \ldots, k. \qquad \square$$

Definisjon: Dimensjon

- Et vektorrom kalles endeligdimensjonalt hvis det har en basis bestående av endelig mange vektorer. Det minste antall vektorer som forekommer i en basis for V, kalles dimensjonen til V og skrives $\dim V$. Vi definerer $\dim \{\vec{0}\} = 0$.
- Et vektorrom som ikke har en basis med endelig mange vektorer, kalles uendeligdimensjonalt.

Teorem 4 : Alle basiser har samme antall vektorer

Hvis V er endeligdimensjonalt, består alle basiser for V av det samme antallet vektorer.

Bevis Hvis $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in V$ er lineært uavhengige, så finnes det ikke vektorer $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r \in V$ med $r < k$ slik at

$$\text{Span}\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r\} = \text{Span}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}.$$

Se beviset for teorem 8. 4. 2 (fungerer uendret). $\square$

Teorem 5

Hvis S er en lineært uavhengig samling vektorer i et endelig-dimensjonalt vektorrom V, så fins en basis for V der alle vektorene fra S er med.

Bevis Hvis $\text{Span}\, S \neq V$, fins $\vec{v} \in V$ slik at $S \cup \{\vec{v}\}$ er en lineært uavhengig samling. Fortsett slik til antall vektorer er lik dimensjonen til V. $\square$

Definisjon : Underrom

Et underrom $\mathcal{U}$ av et vektorrom V er en delmengde $\mathcal{U} \subseteq V$ som selv er et vektorrom under de to vektorromsoperasjonene i V.

Teorem 6 : Kriterier for å være et underrom

$\mathcal{U} \subseteq V$ er et underrom

$\Leftrightarrow$ $\vec{0} \in \mathcal{U}$ og $\mathcal{U}$ er lukket under de to operasjonene i V, dvs. at vi for alle $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{U}$ og $r \in \mathbb{R}$ har $\vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{U}$ og $r\vec{u} \in \mathcal{U}$.

Bevis $\Rightarrow$ Ved A1 og A2 må $\mathcal{U}$ være lukket under operasjonene. La $\vec{0}_u$ være nullvektoreren i $\mathcal{U}$. Ved teorem 12.1.1. (4) er $0\,\vec{0}_u = \vec{0}$. Dermed er $\vec{0} \in \mathcal{U}$, ved lukkethet av $\mathcal{U}$. At $\vec{0}_u = \vec{0}$ følger nå fra teorem 12.1.1. (1)

$\Leftarrow$ Da er A1, A2 og A3 oppfylt for $\mathcal{U}$. At A5 - A10 er oppfylt for $\mathcal{U}$, følger fordi $\mathcal{U} \subseteq V$.

Må vise A4. Hvis $\vec{u} \in \mathcal{U}$, så er $(-1)\vec{u} \in \mathcal{U}$ ved lukkethet. Vi får da

$$(-1)\vec{u} \underset{\text{Teorem 12.1.1 (6)}}{=} -(1\vec{u}) \underset{\text{A10}}{=} -\vec{u}$$

Så $-\vec{u} \in \mathcal{U}$. Vi vet at $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$, siden V oppfyller A4. $\square$

Teorem 7 : Underrom arver endelig dimensjon

Hvis V er et endeligdimensjonalt vektorrom av dimensjon r og $U \subseteq V$ er et underrom, så er U endeligdimensjonalt og $\dim U \leq r$.

Bevis : Snakket, og vise KOLA s. 580. $\square$

eks. $\mathbb{P}_n$ = mengden av polynomer av grad $\leq n$

Da er $\mathbb{P}_n$ et underrom av $\mathbb{P}_\infty$.

Basis for $\mathbb{P}_0$: $\{1\}$ (dim 1)

— " — $\mathbb{P}_1$: $\{1, x\}$ (dim 2)

— " — $\mathbb{P}_2$: $\{1, x, x^2\}$ (dim 3)