13.3 Projeksjoner (Lay 6.2, 6.3)

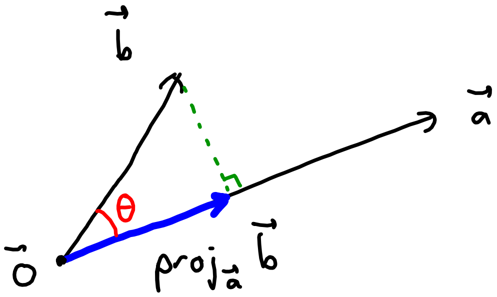
Definisjon

V indreproduktrom, la $\vec{a}, \vec{b} \in V$

Med projeksjonen av $\vec{b}$ langs $\vec{a}$ menes vektoren

$$\text{proj}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} \cdot \vec{a}$$

Forklaring:



Vil ha (figur)

Enhetsvektoren i samme retning som $\vec{a}$

$$\text{proj}_{\vec{a}} \vec{b} = \|\vec{b}\| \cdot \cos\theta \cdot \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a}$$

$$= \cancel{\|\vec{b}\|} \cdot \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\| \cdot \cancel{\|\vec{b}\|}} \cdot \frac{1}{\|\vec{a}\|} \cdot \vec{a}$$

$$= \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\|^2} \cdot \vec{a} = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} \cdot \vec{a}$$

Definisjon + Teorem 1

V indreproduktrom, $\mathcal{U} \subseteq V$ underrom

Mengden av $\vec{v} \in V$ som er ortogonale til alle vektorene i $\mathcal{U}$, kalles det ortogonale komplementet til $\mathcal{U}$ og skrives

$$\mathcal{U}^{\perp}$$

Da gjelder:

(1) $\mathcal{U}^{\perp}$ er et underrom av V

(2) Hvis $\mathcal{U}$ er endeligdimensjonalt, fins til hver vektor $\vec{v} \in V$ en unik vektor $\vec{v}_{\mathcal{U}} \in \mathcal{U}$ og en unik vektor $\vec{v}_{\mathcal{U}^{\perp}} \in \mathcal{U}^{\perp}$ slik at

$$\vec{v} = \vec{v}_{\mathcal{U}} + \vec{v}_{\mathcal{U}^{\perp}}$$

og

$$\|\vec{v}\|^2 = \|\vec{v}_{\mathcal{U}}\|^2 + \|\vec{v}_{\mathcal{U}^{\perp}}\|^2$$

Bevis (1) Siden $\langle \vec{0}, \vec{v} \rangle = 0$ for alle $\vec{v} \in V$, er $\vec{0} \in \mathcal{U}^{\perp}$.

Anta $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{U}^{\perp}$. La $\vec{v} \in \mathcal{U}$ og $r \in \mathbb{R}$. Da:

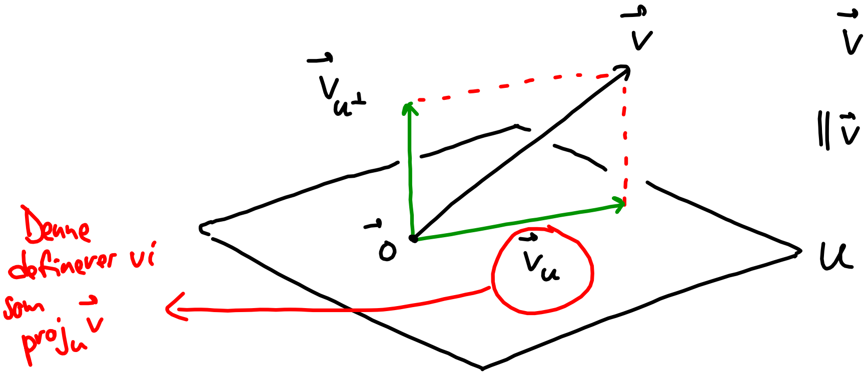
$$\langle \vec{v}, \vec{a} + \vec{b} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{b} \rangle = 0 + 0 = 0$$

$$\langle \vec{v}, r\vec{a} \rangle = r \langle \vec{v}, \vec{a} \rangle = r \cdot 0 = 0.$$

Så $\vec{a} + \vec{b} \in \mathcal{U}^{\perp}$ og $r\vec{a} \in \mathcal{U}^{\perp}$. Dermed har vi vist at $\mathcal{U}^{\perp}$ tilfredsstiller A1 og A2 for vektorrom.

(2) Vist KOLA s. 642-643. $\square$

Figur :



$$\vec{v} = \vec{v}_U + \vec{v}_{U^\perp}$$

$$\|\vec{v}\|^2 = \|\vec{v}_U\|^2 + \|\vec{v}_{U^\perp}\|^2$$

Definisjon + Teorem 2 (Approksimasjonsteoremet)

V indreproduktrom, $U \subseteq V$ endeligdimensjonalt underrom

$\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ ortonormal basis for U

Med projeksjonen av en vektor $\vec{v} \in V$ på underrommet U menes da vektoren $\text{proj}_U \vec{v}$ gitt ved

$$\text{proj}_U \vec{v} \overset{\text{def}}{=} \langle \vec{u}_1, \vec{v} \rangle \vec{u}_1 + \ldots + \langle \vec{u}_n, \vec{v} \rangle \vec{u}_n$$

Vektoren $\text{proj}_U \vec{v}$ ligger da nærmere $\vec{v}$ enn noen annen vektor $\vec{x} \in U$, dvs.

$$\|\vec{v} - \text{proj}_U \vec{v}\| < \|\vec{v} - \vec{x}\|$$

for alle $\vec{x} \neq \text{proj}_U \vec{v}$ i underrommet U.

Se figur ovenfor. Poenget er at vi definerer $\text{proj}_U \vec{v} = \vec{v}_U$.
(jamfør likning (3) i beviset KOLA s. 642)

<u>Bevis</u> La $\vec{x} \in \mathcal{U}$. Vi har

$$\vec{v} - \vec{x} = \underbrace{(\vec{v} - \mathrm{proj}_{\mathcal{U}} \vec{v})}_{\substack{\text{Denne er } \vec{v}_{\mathcal{U}^\perp} \\ \text{så den ligger i } \mathcal{U}^\perp}} + \underbrace{(\mathrm{proj}_{\mathcal{U}} \vec{v} - \vec{x})}_{\substack{\text{Denne ligger i } \mathcal{U}, \\ \text{fordi } \mathcal{U} \text{ er et underrom}}} \qquad (*)$$

Dermed er $(*)$ en oppsplitting av typen fra punkt (2) i teorem 1, med $\vec{v} - \vec{x}$ i rollen som $\vec{v}$. Vi får

$$\|\vec{v} - \vec{x}\|^2 = \|\vec{v} - \mathrm{proj}_{\mathcal{U}} \vec{v}\|^2 + \|\mathrm{proj}_{\mathcal{U}} \vec{v} - \vec{x}\|^2$$

ved teorem 1 punkt (2) brukt på vektoren $\vec{v} - \vec{x}$.

Her har vi:

$$\|\vec{v} - \vec{x}\|^2 = \|\vec{v} - \mathrm{proj}_{\mathcal{U}} \vec{v}\|^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\|\mathrm{proj}_{\mathcal{U}} \vec{v} - \vec{x}\| = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathrm{proj}_{\mathcal{U}} \vec{v} = \vec{x}. \qquad \square$$