$\boxed{\text{13.3 forts.}}$ (Lay 6.2, 6.3)

Teorem 3

V indreproduktrom

$\mathcal{U} \subseteq V$ endeligdimensjonalt underrom

Anta at $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ spenner ut $\mathcal{U}$.

Hvis $\vec{x}, \vec{y} \in V$ oppfyller

$$\langle \vec{u}_i, \vec{x} \rangle = \langle \vec{u}_i, \vec{y} \rangle \quad \text{for } i = 1, \dots, k$$

så er $\mathrm{proj}_{\mathcal{U}} \vec{x} = \mathrm{proj}_{\mathcal{U}} \vec{y}$.

Bevis La $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r\}$ være en ortonormal basis for $\mathcal{U}$.

Per definisjon av projeksjonen på $\mathcal{U}$ er da

$$\mathrm{proj}_{\mathcal{U}} \vec{x} = \langle \vec{b}_1, \vec{x} \rangle \vec{b}_1 + \dots + \langle \vec{b}_r, \vec{x} \rangle \vec{b}_r$$

$$\mathrm{proj}_{\mathcal{U}} \vec{y} = \langle \vec{b}_1, \vec{y} \rangle \vec{b}_1 + \dots + \langle \vec{b}_r, \vec{y} \rangle \vec{b}_r$$

Så nok å vise at $\langle \vec{b}_i, \vec{x} \rangle = \langle \vec{b}_i, \vec{y} \rangle$ for $i = 1, \dots, r$.

Siden $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ spenner ut $\mathcal{U}$, kan vi skrive

$$\vec{b}_i = c_{i1} \vec{u}_1 + \dots + c_{ik} \vec{u}_k \qquad \text{for } i = 1, \dots, r$$

Dette gir

$$\begin{aligned}
\langle \vec{b}_i, \vec{x} \rangle &= \langle c_{i1} \vec{u}_1 + \dots + c_{ik} \vec{u}_k, \vec{x} \rangle \\
&= c_{i1} \langle \vec{u}_1, \vec{x} \rangle + \dots + c_{ik} \langle \vec{u}_k, \vec{x} \rangle \\
&= c_{i1} \langle \vec{u}_1, \vec{y} \rangle + \dots + c_{ik} \langle \vec{u}_k, \vec{y} \rangle \\
&= \langle c_{i1} \vec{u}_1 + \dots + c_{ik} \vec{u}_k, \vec{y} \rangle \\
&= \langle \vec{b}_i, \vec{y} \rangle \qquad \text{for } i = 1, \dots, r. \quad \square
\end{aligned}$$

Antakelsen i teoremet

Teorem 4

V indreproduktrom

$U \subseteq V$ endeligdimensjonalt underrom

Da er avbildningen $P: V \to V$ gitt ved

$$P(\vec{v}) = \text{proj}_U \vec{v} \qquad \text{for alle } \vec{v} \in V$$

en lineærtransformasjon. Denne kalles projeksjonen av vektorrommet V på underrommet U.

Bevis La $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ være en ortonormal basis for U, og la $\vec{v}, \vec{w} \in V$. Da:

$$P(\vec{v}+\vec{w}) = \langle \vec{v}+\vec{w}, \vec{u}_1 \rangle \vec{u}_1 + \dots + \langle \vec{v}+\vec{w}, \vec{u}_n \rangle \vec{u}_n$$

$$= \underline{\langle \vec{u}_1, \vec{v} \rangle \vec{u}_1} + \underline{\langle \vec{u}_1, \vec{w} \rangle \vec{u}_1} + \dots + \underline{\langle \vec{u}_n, \vec{v} \rangle \vec{u}_n} + \underline{\langle \vec{u}_n, \vec{w} \rangle \vec{u}_n}$$

$$= \underline{P(\vec{v})} + \underline{P(\vec{w})}$$

Tilsvarende fås $P(r\vec{v}) = r \cdot P(\vec{v})$ for alle $r \in \mathbb{R}$. $\square$

Teorem 5

V endeligdimensjonalt indreproduktrom med ortonormal basis B.
U underrom av V med ortonormal basis $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k\}$
La

$$A = \begin{bmatrix} [\vec{u}_1]_B & \cdots & [\vec{u}_k]_B \end{bmatrix}$$

(A er matrisen med $[\vec{u}_i]_B$ som søyler)

og la $P : V \to V$ være projeksjonen av V på underrommet U.
Da er

$$[P]_B = A \cdot A^T$$

Bevis La $\vec{v} \in V$. Vi har

$$[P(\vec{v})]_B = [\langle \vec{u}_1, \vec{v}\rangle \vec{u}_1 + \ldots + \langle \vec{u}_k, \vec{v}\rangle \vec{u}_k]_B$$

Fordi koordinat-avbildningen er en lineærtransformasjon

$$= \langle \vec{u}_1, \vec{v}\rangle [\vec{u}_1]_B + \ldots + \langle \vec{u}_k, \vec{v}\rangle [\vec{u}_k]_B$$

Matrise-produkt

$$= \begin{bmatrix} [\vec{u}_1]_B & \cdots & [\vec{u}_k]_B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \langle \vec{u}_1, \vec{v}\rangle \\ \vdots \\ \langle \vec{u}_k, \vec{v}\rangle \end{bmatrix}$$

Basisen B er ortonormal, så $\langle \vec{u}_i, \vec{v}\rangle$ kan regnes ut slik

$$= A \cdot \begin{bmatrix} [\vec{u}_1]_B^T \cdot [\vec{v}]_B \\ \vdots \\ [\vec{u}_k]_B^T \cdot [\vec{v}]_B \end{bmatrix}$$

$$= A \cdot \begin{bmatrix} [\vec{u}_1]_B^T \\ \vdots \\ [u_k]_B^T \end{bmatrix} \cdot [\vec{v}]_B$$

$$= A \cdot A^T \cdot [\vec{v}]_B = (A \cdot A^T) \cdot [\vec{v}]_B$$

Siden $\vec{v} \in V$ var vilkårlig, følger at

$$[P]_B = A A^T \quad \square$$

eks. La $P : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ være projeksjonen på underrommet U utspent av $\frac{1}{2}(1,1,1,1)$ og $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1)$.

Finn $[P]_B$ der B er standardbasis i $\mathbb{R}^4$.

Løsn. Her er $V = \mathbb{R}^4$. La

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1) \quad \text{og} \quad \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,-1,1)$$

Vi har

$$\|\vec{u}_1\| = \frac{1}{2}\cdot\|(1,1,1,1)\| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2} = 1$$

$$\|\vec{u}_2\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1^2+1^2} = 1$$

$$\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\big(0+0+(-1)+1\big) = 0$$

Så $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ er en ortonormal basis for U.

Teorem 5 gir da, med B = standardbasis:

$$[P]_B = A\cdot A^T = \begin{bmatrix} \boxed{\vec{u}_1} & \boxed{\vec{u}_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boxed{\vec{u}_1} & \boxed{\vec{u}_2} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{array}{cc|cccc} & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \hline \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array} = \frac{1}{4}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Merk at matrisen $A \cdot A^T$ er symmetrisk. Det er ikke tilfeldig:

$$(A \cdot A^T)^T = (A^T)^T \cdot A^T = A \cdot A^T$$

$$\boxed{(M \cdot N)^T = N^T \cdot M^T}$$

Tilsvarende:

$$(A^T A)^T = A^T \cdot (A^T)^T = A^T \cdot A$$

Også symmetrisk.