12.2 Lineærtransformasjoner (Lay: 4.2, 4.3)

Definisjon

En lineærtransformasjon fra et vektorrom V til et vektorrom W er en funksjon $T: V \to W$ slik at

L1 $\quad T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}) \quad$ for alle $\vec{u}, \vec{v} \in V$

L2 $\quad T(r\vec{u}) = r \cdot T(\vec{u}) \quad$ for alle $\vec{u} \in V$ og $r \in \mathbb{R}$

eks. Skal vise at $T: \mathbb{P}_4 \to \mathbb{P}_4$ gitt ved

$$T(p) = 2p'$$

er en lineærtransformasjon.

$$\left(\text{Eks: } T(x^4 - 5x) = 2\cdot(x^4-5x)' = 2\cdot(4x^3-5) = -10+8x^3\right)$$

Løsn. Vi sjekker L1 og L2. Vi har: (for alle $p, q \in \mathbb{P}_4$)

$$T(p+q) = 2(p+q)'$$

Derivasjonsregel: $(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x)$

$$= 2(p'+q') = 2p' + 2q' = T(p) + T(q)$$

$$T(rp) = 2\cdot(rp)'$$

Derivasjonsregel: $(rf)'(x) = r\cdot f'(x)$

$$= 2\cdot(r\cdot p') = r\cdot 2p' = r\cdot T(p)$$

for alle $r \in \mathbb{R}$ og $p \in \mathbb{P}_4$. $\square$

Teorem 1: Bevaring av lineærkombinasjoner

La $T: V \to W$ være en lineærtransformasjon, la $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ være vektorer i V, og la $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}$. Da er

$$T(r_1\vec{v}_1 + \dots + r_n\vec{v}_n) = r_1 \cdot T(\vec{v}_1) + \dots + r_n \cdot T(\vec{v}_n)$$

Bevis: Viste KOLA s. 584.

Teorem 2: Bevaring av null og subtraksjon

La $T: V \to W$ være en lineærtransformasjon. Da:

(1) $T(\vec{0}) = \vec{0}'$ der $\vec{0}$ er nullvektoren i V og $\vec{0}'$ — " — W.

(2) $T(\vec{u} - \vec{v}) = T(\vec{u}) - T(\vec{v})$ for alle $\vec{u}, \vec{v} \in V$.

Bevis (1)

$$\begin{aligned} T(\vec{0}) &= T(0\vec{0}) && [\text{teo. 12.1.1 (4)}: 0\vec{v} = \vec{0}] \\ &= 0 \cdot T(\vec{0}) && [\text{ved L2}] \\ &= \vec{0}' && [\text{teo. 12.1.1 (4), brukt på } W] \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} T(\vec{u} - \vec{v}) &= T(\vec{u} + (-1)\vec{v}) && [\text{def. av subtraksjon}] \\ &= T(\vec{u}) + T((-1)\vec{v}) && [\text{L1}] \\ &= T(\vec{u}) + (-1) \cdot T(\vec{v}) \\ &= T(\vec{u}) - T(\vec{v}) && [\text{def. av subtraksjon}] \quad \square \end{aligned}$$

Teorem 3 : Bildet av basisen bestemmer transformasjonen entydig

La $T : V \to W$ være en lineærtransformasjon, og la B være en basis for V. Da er

$$T(\vec{u})$$

for en vilkårlig vektor $\vec{u} \in V$ entydig bestemt av verdiene

$$T(\vec{b}), \text{ der } \vec{b} \in B.$$

Bevis Viste KOLA s. 585.

Oppgave 12.1.8c

Er mengden av alle invertible (3×3)-matriser et vektorrom V når vi adderer matriser og multipliserer dem med tall på vanlig måte?

Tja.

A1: Er $\vec{u}+\vec{v}\in V$ for alle $\vec{u},\vec{v}\in V$?

Ta

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Den er invertibel, $A^{-1} = A$

$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ — " — , $B^{-1} = B$

Har da $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ som ikke er inverterbar

Altså har vi $A\in V$, $B\in V$, men $A+B\notin V$.
Så A1 er ikke oppfylt. Altså er dette ikke et vektorrom.