$\boxed{\text{12.10 Anvendelse: Lineære differensiallikninger}}$ (Lay 5.7)

<u>Hovedpoeng</u>: Differensiallikninger på formen

$$\underbrace{c_n y^{(n)}(t)}_{\text{n'te derivert}} + c_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + c_2 y''(t) + c_1 y'(t) + c_0 y(t) = 0$$

der $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ er konstante koeffisienter og $c_n \neq 0$, kan gjøres om til et differensiallikningssystem av typen

$$\vec{x}\,' = A\vec{x} \qquad (\text{der } A \text{ er en } (n \times n)\text{-matrise})$$

ved følgende triks:

$$x_1(t) = y(t), \; x_2(t) = y'(t), \ldots, x_n(t) = y^{(n-1)}(t)$$

Da får vi nemlig

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \quad \vdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ c_n x_n' + \underbrace{c_{n-1} x_n + \ldots + c_2 x_3 + c_1 x_2 + c_0 x_1}_{\text{flytt disse leddene over, og del på } c_n} = 0 \end{cases}$$

eks. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

Skal finne generell løsning.

Løsn. Trikset:

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = y'(t) \\ x_3(t) = y''(t) \end{cases} \quad \text{gir} \quad \begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = x_3(t) \\ x_3'(t) - 2x_3(t) - x_2(t) + 2x_1(t) = 0 \end{cases}$$

Altså

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Så systemet er $\vec{x}' = A\vec{x}$, der

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Vi kan så følge metoden for å løse $\vec{x}' = A\vec{x}$. Egenverdier:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\big(\lambda(\lambda-2) - 1\big) - 1\big(0 - (-2)\big)$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda - 1) - 2$$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \quad \text{gir}$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -1 \quad \text{(f.eks. gjetting)}$$

Og så videre. Vi trenger til slutt bare $\underline{\underline{y(t) = x_1(t)}}$

12.12 Anvendelse: Markovkjeder (Lay 5.9)

Definisjoner

- En vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ kalles en <u>sannsynlighetsvektor</u> hvis alle komponentene er ikke-negative, og
$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$$
- En $(n \times n)$-matrise M kalles en <u>stokastisk matrise</u> hvis alle søylevektorene er sannsynlighetsvektorer.
- En <u>Markov-kjede</u> er et matrisedynamisk system (et diskret dynamisk system)
$$\vec{x}_{n+1} = M \cdot \vec{x}_n \qquad (\text{for } n \geq 0)$$
der M er en stokastisk matrise og $\vec{x}_0$ er en sannsynlighetsvektor.

Kommentar Man kan sjekke (oppgave til neste uke) at hvis $\vec{x}$ er en sannsynlighetsvektor og M er en stokastisk matrise, så er også $M\vec{x}$ en sannsynlighetsvektor.

Eksempel

Studenthistorien fra forelesningen 24. august omformulert som Markov-kjede.

Vi lar nå modellen være slik:

$$\begin{cases} x_n = P(\text{en tilfeldig valgt student fester på dag } n) \\ y_n = P(\text{— " — sover — " —}) \\ z_n = P(\text{— " — leser — " —}) \end{cases}$$

Overgangen fra dag n til dag $n+1$ er som før, bortsett fra at vi nå tolker prosentene som sannsynligheter:

$$\text{Fester} \xrightarrow{100\%} \boxed{\text{Sover}} \qquad \text{Sover} \begin{cases} \xrightarrow{50\%} \text{Leser} \\ \xrightarrow{50\%} \text{Fester} \end{cases} \qquad \text{Leser} \begin{cases} \xrightarrow{50\%} \text{Fester} \\ \xrightarrow{50\%} \text{Leser} \end{cases}$$

Dette gir

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2} y_n + \frac{1}{2} z_n & \text{(bidrag fra røde ringer)} \\ y_{n+1} = x_n & \text{(bidrag fra rød firkant)} \\ z_{n+1} = \frac{1}{2} y_n + \frac{1}{2} z_n & \text{(bidrag fra røde hjerter)} \end{cases}$$

Altså

$$\vec{x}_{n+1} = M \vec{x}_n \quad \text{for } n \geq 0,$$

der

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \left(\text{alle leser på dag } n=0\right)$$

Merk: M er en stokastisk matrise, så modellen vår er en Markov-kjede.

Egenverdier og egenvektorer for M : (eksemplet forts.)

Se video fra forelesning 23. august, vist ved tid 1:26:00 (finnes i KOLA s. 329)

- Egenverdi $\lambda_1 = 0$ med egenvektorer $\begin{bmatrix} 0 \\ -C_1 \\ C_1 \end{bmatrix} = C_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
- Egenverdi $\lambda_2 = 1$ — " — $\begin{bmatrix} B_2 \\ B_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = B_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
- Egenverdi $\lambda_3 = -\frac{1}{2}$ — " — $\begin{bmatrix} C_3 \\ -2C_3 \\ C_3 \end{bmatrix} = C_3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Variant I av metoden for å finne $\vec{x}_n$:

Vi har nå (diagonalisering)

$$M^n = PD^nP^{-1}, \quad \text{der } P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Så

$$\vec{x}_n = M^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = M^n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{PD^nP^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

Variant II av metoden for å finne $\vec{x}_n$:

Vi skriver startvektoren $\vec{x}_0$ som en sum av egenvektorer for M, dvs. uttrykker $\vec{x}_0$ i en egenbasis for M :

$$\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \overset{\text{finner}}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

Dette gir

$$\vec{x}_n = M^n \vec{x}_0 = M^n \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + M^n \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} + M^n \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda_1^n \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2^n \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} + \lambda_3^n \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

$$= 0^n \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1^n \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n \cdot \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

Merk at $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$ (likevektstilstand, dvs. egenvektor med egenverdi 1.)