

## 12.3 : Kjerne, rekkevidde og inverse (Lay 4.1-4.3)

### Definisjon

La  $T : V \rightarrow W$  være en lineærtransformasjon.

$$\text{Ker } T \stackrel{\text{def}}{=} \{ \vec{v} \in V \mid T(\vec{v}) = \vec{0} \} \quad (\text{kjernen til } T)$$

$$\text{Ran } T \stackrel{\text{def}}{=} T(V) \stackrel{\text{def}}{=} \{ T(\vec{v}) \mid \vec{v} \in V \} \quad (\text{rekkevidden til } T)$$

### Teorem 1

Hvis  $T_1 : V \rightarrow V_1$  og  $T_2 : V_1 \rightarrow V_2$  er lineærtransformasjoner, så er også

$$T_2 \circ T_1 : V \rightarrow V_2$$

gitt ved  $(T_2 \circ T_1)(\vec{v}) = T_2(T_1(\vec{v}))$  for alle  $\vec{v} \in V$ , en lineærtransformasjon.

Bevis Viste KOLA, s. 587.

- Identitetstransformasjonen  $\text{id}_V : V \rightarrow V$  på et vektorrom  $V$  er definert ved  $\text{id}_V(\vec{v}) = \vec{v}$  for alle  $\vec{v} \in V$
- $T^2 \stackrel{\text{def}}{=} T \circ T$ ,  $T^3 \stackrel{\text{def}}{=} T \circ T \circ T$  osv. for lineærtransformasjoner  $T$ .

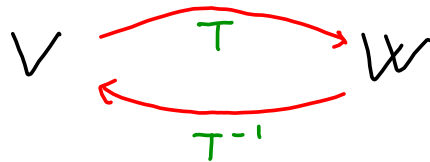
Definisjon

En lineærtransformasjon  $T: V \rightarrow W$  kalles inverterbar hvis det fins en lineærtransformasjon

$$T^{-1}: W \rightarrow V$$

slik at  $T^{-1} \circ T = \text{id}_V$  og  $T \circ T^{-1} = \text{id}_W$ .

Da kalles  $T$  og  $T^{-1}$  inverse av hverandre.



Hvis  $T: V \rightarrow W$  og  $W' \subseteq W$ , så er inversbildet

$$T^{-1}(W')$$

av  $W'$  definert ved

$$T^{-1}(W') \stackrel{\text{def}}{=} \{ \vec{v} \in V \mid T(\vec{v}) \in W' \}$$

Teorem 2

En lineærtransformasjon  $T: V \rightarrow W$  er inverterbar hvis den er injektiv (en-entydig) og surjektiv på  $W$ . dvs.  $\text{Ran } T = W$ .

Bevis Viste KOLA s. 588.

Teorem 3 La  $T: V \rightarrow W$  være en lineærtransformasjon. Da har vi:

(1) Hvis  $V'$  er et underrom av  $V$ , så er  $T(V')$  et underrom av  $W$ .

(2) Hvis  $W'$  er et underrom av  $W$ , så er  $T^{-1}(W')$  et underrom av  $V$ .

Bevis Viste KOLA s. 589.

Teorem 4

La  $T: V \rightarrow W$  være en lineærtransformasjon. Da er  $\text{Ker } T$  et underrom av  $V$ , og  $\text{Ran } T$  er et underrom av  $W$ .

Bevis  $\{\vec{0}\}$  er et underrom av  $W$ , og ved teorem 3 punkt (2)

er da

$$T^{-1}(\{\vec{0}\}) = \text{Ker } T$$

et underrom av  $V$ . Videre er  $V$  et underrom av seg selv, og ved teorem 3 punkt (1) er da  $T(V) = \text{Ran } T$  et underrom av  $W$ .  $\square$

Eksempel

La  $V$  være vektorrommet av alle  $C^\infty$  funksjoner  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dvs. alle  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  som er uendelig mange ganger deriverbare. Definer

$$T: V \rightarrow V \quad \text{ved} \quad T(f) = f'' + 9f.$$

a) Vis at  $T$  er en lineærtransformasjon.

Løsn.  $T(f+g) = (f+g)'' + 9(f+g)$

Derivasjonsregler  $\rightarrow$

$$= f'' + g'' + 9f + 9g$$

$$= (f'' + 9f) + (g'' + 9g) = T(f) + T(g)$$

$$T(rf) = (rf)'' + 9(rf)$$

$$= rf'' + r(9f) = r(f'' + 9f) = r \cdot T(f)$$

b) Finn  $\text{Ker } T$

Løsn.  $f \in \text{Ker } T \Leftrightarrow T(f) = \vec{0}$  nullfunksjonen  $f$  gitt ved  $f(x) = 0$  for alle  $x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow f'' + 9f = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow f''(x) + 9 \cdot f(x) = 0 \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}$$

Denne difflikningen har den generelle løsningen

$$f(x) = A \cos(3x) + B \sin(3x)$$

der  $A, B \in \mathbb{R}$ . (MAT-INF 1100, se KOLA s. 251)

Så  $\text{Ker } T$  består av alle  $f \in V$  som kan skrives

$$\underline{f(x) = A \cos(3x) + B \sin(3x)}$$