12.3 : Kjerne, rekkevidde og inverse (Lay 4.1 – 4.3)

Definisjon

La $T : V \to W$ være en lineærtransformasjon.

$$\operatorname{Ker} T \overset{\text{def}}{=} \{\vec{v} \in V \mid T(\vec{v}) = \vec{0}\} \quad (\text{kjernen til } T)$$

$$\operatorname{Ran} T \overset{\text{def}}{=} T(V) \overset{\text{def}}{=} \{T(\vec{v}) \mid \vec{v} \in V\} \quad (\text{rekkevidden til } T)$$

Teorem 1

Hvis $T_1 : V \to V_1$ og $T_2 : V_1 \to V_2$ er lineærtransformasjoner, så er også

$$T_2 \circ T_1 : V \to V_2$$

gitt ved $(T_2 \circ T_1)(\vec{v}) = T_2(T_1(\vec{v}))$ for alle $\vec{v} \in V$, en lineærtransformasjon.

Bevis Viste KOLA, s. 587.

- Identitetstransformasjonen $id_V : V \to V$ på et vektorrom V er definert ved
$$id_V(\vec{v}) = \vec{v} \quad \text{for alle } \vec{v} \in V$$
- $T^2 \overset{\text{def}}{=} T \circ T$, $T^3 \overset{\text{def}}{=} T \circ T \circ T$ osv. for lineærtransformasjoner T.

Definisjon

En lineærtransformasjon $T : V \to W$ kalles invertérbar hvis det fins en lineærtransformasjon

$$T^{-1} : W \to V$$

slik at $T^{-1} \circ T = id_V$ og $T \circ T^{-1} = id_W$.

Da kalles T og T^{-1} inverse av hverandre.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, bend left, "T"] & W \arrow[l, bend left, "T^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Hvis $T : V \to W$ og $W' \subseteq W$, så er inversbildet

$$T^{-1}(W')$$

av W' definert ved

$$T^{-1}(W') \overset{def}{=} \{ \vec{v} \in V \mid T(\vec{v}) \in W' \}$$

Teorem 2

En lineærtransformasjon $T : V \to W$ er inverterbar hviss den er injektiv (én-entydig) og surjektiv på W, dvs. $\operatorname{Ran} T = W$.

Bevis Viste KOLA s. 588.

Teorem 3 La $T : V \to W$ være en lineærtransformasjon. Da har vi:

(1) Hvis V' er et underrom av V, så er $T(V')$ et underrom av W.
(2) — " — W' — " — W, — " — $T^{-1}(W')$ — " — V

Bevis Viste KOLA s. 589.

Teorem 4

La $T : V \to W$ være en lineærtransformasjon. Da er $\operatorname{Ker} T$ et underrom av V, og $\operatorname{Ran} T$ er et underrom av W.

Bevis $\{\vec{0}\}$ er et underrom av W, og ved teorem 3 punkt (2) er da

$$T^{-1}(\{\vec{0}\}) = \operatorname{Ker} T$$

et underrom av V. Videre er V et underrom av seg selv, og ved teorem 3 punkt (1) er da $T(V) = \operatorname{Ran} T$ et underrom av W. $\square$

Eksempel

La V være vektorrommet av alle C^∞ funksjoner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dvs. alle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som er uendelig mange ganger deriverbare. Definer

$$T : V \to V \quad \text{ved} \quad T(f) = f'' + 9f.$$

a) Vis at T er en lineærtransformasjon.

Løsn.

$$T(f+g) = (f+g)'' + 9(f+g)$$

Derivasjons-regler

$$\overset{\downarrow}{=} f'' + g'' + 9f + 9g$$

$$= (f'' + 9f) + (g'' + 9g) = T(f) + T(g)$$

$$T(rf) = (rf)'' + 9(rf)$$

$$\overset{\downarrow}{=} rf'' + r(9f) = r(f'' + 9f) = r \cdot T(f)$$

b) Finn $\ker T$

Løsn. $f \in \ker T \Leftrightarrow T(f) = \vec{0}$

nullfunksjonen f gitt ved $f(x) = 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow f'' + 9f = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow f''(x) + 9 \cdot f(x) = 0 \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}$$

Denne difflikningen har den generelle løsningen

$$f(x) = A\cos(3x) + B\sin(3x)$$

der $A, B \in \mathbb{R}$. (MAT-INF 1100, se KOLA s. 251)

Så $\ker T$ består av alle $f \in V$ som kan skrives

$$\underline{f(x) = A\cos(3x) + B\sin(3x)}$$