12.12 Anvendelse: Markovkjeder (forts.) (Lay 5.9)

Likevektstilstander for Markovkjeder

En vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ kalles en likevektstilstand for en Markovkjede modellert ved en $(n \times n)$-matrise M dersom

$$M\vec{x} = \vec{x} \qquad (\vec{x} \text{ sannsynlighetsvektor})$$

Vi får da følgende pene resultat:

Teorem 1

Hvis M er en stokastisk matrise, så er $\lambda = 1$ en egenverdi for M.

Bevis La

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{n1} & \cdots & M_{nn} \end{bmatrix}$$

Da er

$$M^T \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} + \ldots + M_{n1} \\ \vdots \\ M_{1n} + \ldots + M_{nn} \end{bmatrix} \overset{\text{Fordi } M \text{ er en stokastisk matrise}}{=} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Så $\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor for M^T med egenverdi 1.

Altså er 1 en egenverdi for M^T, og dermed også for M.

(Oppgave 7.9.9 i KOLA, oppgave 5.1.35 i Lay) $\square$

NB: Det følger ikke av dette at $\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor for matrisen M!

Moteksempel:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Egenverdier for M: $\begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & 1 \\ \frac{1}{2} & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} = 0$

Vi ser her at $\lambda = 1$ er en egenverdi, som vi visste fra teorem 1.

Men $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (vektoren ble vridd)

så $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ er ikke en egenvektor for M.

Definisjon

En stokastisk matrise M kalles regulær hvis det fins en potens M^k for $k \geq 1$ som ikke har nuller i seg.

eks. 1 Matrisen M fra studenthistorien er regulær, for vi har (sjekk dette, hvis du vil)

$$M^3 = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}}_{\text{ingen nuller}}$$

(her fungerte $k = 3$)

$\square$

eks. 2 Identitetsmatrisen I er en irregulær stokastisk matrise, for vi har

$$I^k = I \quad \text{for alle } k \geq 1. \quad \square$$

Teorem 2

(1) Hvis M er en stokastisk matrise, så har M minst èn likevektstilstand

(2) Hvis M i tillegg er regulær, så er likevektstilstanden til M unik. Videre:
Hvis $\vec{x}_0$ er en vilkårlig starttilstand og

$$\vec{x}_{n+1} = M \cdot \vec{x}_n \quad \text{for alle } n \geq 0,$$

så konvergerer $\vec{x}_n$ mot likevektstilstanden når $n \to \infty$.

Bevis Detaljer droppes, snakket.

eks. 1 I studenthistorien er M regulær, og vi fant

$$\lim_{n \to \infty} \vec{x}_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Likevektstilstand: Unik.
(Dette er den eneste sannsynlighetsvektoren som er en egenvektor med egenverdi 1.)

Vi ville altså fått dette uansett hvilken startvektor vi brukte (punkt 2 i teoremet) $\square$

eks. 2 Hvis M er identitetsmatrisen, er alle sannsynlighetsvektorer likevektstilstander, fordi $M\vec{x} = \vec{x}$ for alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
Dette svarer til at M er en irregulær stokastisk matrise. $\square$

$\boxed{\text{12.13 Anvendelse : Potensmetoden}}$ (Lay 5.8)

(Dette er en metode for iterativ estimering av egenverdier)

Da vi jobbet med matrisedynamiske modeller (diskrete dynamiske systemer) fant vi tilstandsvektoren $\vec{x}_n$ ved tid $t=n$ ved å skrive startvektoren $\vec{x}_0$ som en sum av egenvektorer $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ for overgangsmatrisen.
Vi fikk så

$$\vec{x}_n = \lambda_1^n \vec{v}_1 + \dots + \lambda_m^n \vec{v}_m$$

der λ_i er egenverdien tilhørende $\vec{v}_i$.

eks. Fra KOLA s. 336 (video fra 24. august) : Vi fikk her

$$\vec{x}_n = 6^n \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} + 1^n \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Her er egenverdien $\lambda_1 = 6$ dominerende, fordi den har størst absoluttverdi. Når n blir stor, blir $\vec{x}_n$ mer og mer parallell med den tilhørende egenvektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix},$$

og for hvert steg multipliseres $\vec{x}_n$ med "omtrent" $\lambda_1 = 6$. □

Mer generelt:

Anta at λ_1 har strengt større absoluttverdi enn de andre egenverdiene i uttrykket

$$\vec{x}_n = \lambda_1^n \vec{v}_1 + \lambda_2^n \vec{v}_2 + \dots + \lambda_m^n \vec{v}_m$$

for tilstanden ved tid $t = n$. Divisjon med λ_1^n gir

$$\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^n \vec{x}_n = \vec{v}_1 + \underbrace{\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n \vec{v}_2 + \dots + \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_1}\right)^n \vec{v}_m}$$

alle disse leddene går mot 0 når $n \to \infty$, fordi λ_1 har størst absoluttverdi

Altså

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^n \vec{x}_n = \vec{v}_1$$

Dette gir bakgrunnen for algoritmen som kalles potensmetoden.
Den skal vi se på i morgen!