12.13 Anvendelse: Potensmetoden (forts.) (Lay 5.8)

Potensmetoden for estimat av dominerende egenverdi/egenvektor

Gitt en kvadratisk matrise M. Anta at det fins en egenbasis $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ for M med tilhørende egenverdier $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, der λ_1 har strengt større absoluttverdi enn $\lambda_2, \dots, \lambda_m$.

(NB: Vi trenger ikke å ha funnet disse tingene på forhånd!)

Algoritme:

1. Velg en startvektor $\vec{y}_0$ der en av komponentene er 1, og de andre komponentene har absoluttverdi mindre enn 1

2. For $n = 0, 1, 2, \dots$ gjør følgende:

   - Finn "mellomregningsvektoren"
   $$\vec{x} = M\vec{y}_n,$$
   og la μ_n være et element i vektoren $\vec{x}$ som har maksimal absoluttverdi.
   - Sett $\vec{y}_{n+1} = \frac{1}{\mu_n} \cdot \vec{x}$ $\square$

Hvis ikke $\vec{y}_0$ tilfeldigvis var en lineærkombinasjon av egenvektorene $\vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$, vil
$$\lim_{n \to \infty} \mu_n = \lambda_1$$
og $\vec{y}_n$ gå mot en tilhørende egenvektor når $n \to \infty$.

Forklaring (Dropper presist bevis)

- Alle vektorene $\vec{y}_0, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots$ har 1 som største komponent i absoluttverdi, fordi vi deler på μ_n
- At $\mu_n \to \lambda_1$, skyldes at $\vec{y}_n$ mer og mer vil nærme seg en egenvektor for M med egenverdi λ_1
- Hvis $\vec{y}_n$ var en slik egenvektor, ville vi fått

$$\vec{x} = M\vec{y}_n = \lambda_1 \vec{y}_n$$

Største absoluttverdi av komponentene i mellomregnings-vektoren $\vec{x}$ er nå λ_1, siden største absoluttverdi i vektoren $\vec{y}_n$ er 1. Altså $\mu_n = \lambda_1$ i dette tilfellet. $\square$

eks. Bruk potensmetoden til å estimere dominerende egenverdi og tilhørende egenvektor for

$$M = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Løsn. Velger $\vec{y}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Følger algoritmen:

n = 0

$$\vec{x} = M\vec{y}_0 = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mu_0 = 5$$

$$\vec{y}_1 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

n = 1

$$\vec{x} = M\vec{y}_1 = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1.8 \end{bmatrix}$$

$$\mu_1 = 8$$

$$\vec{y}_2 = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 8 \\ 1.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.225 \end{bmatrix}$$

n = 2

$$\vec{x} = M\vec{y}_2 = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0.225 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.125 \\ 1.45 \end{bmatrix}$$

$$\mu_2 = 7.125$$

$$\vec{y}_3 = \frac{1}{7.125}\begin{bmatrix} 7.125 \\ 1.45 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ 0.2035 \end{bmatrix}$$

Og så videre. Ser at $\mu_n \to 7$. $\square$

For matrisen M i forrige eksempel har vi ganske riktig regningen

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 5 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-6)-5$$

$$= \lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0,$$

og her ser vi at $\lambda = 7$ er en egenverdi. Videre har vi

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 7 \end{bmatrix} = 7 \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Så $\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$, og dermed også $\begin{bmatrix} 1 \\ 0.2 \end{bmatrix}$, er en egenvektor for M med egenverdi 7. Fra eksemplet ser vi at $\vec{y}_n$ er i ferd med å konvergere mot

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

Den inverse potensmetoden

Dette er en versjon av potensmetoden som kan brukes til å estimere en ikke-dominerende egenverdi med tilhørende egenvektor for en gitt diagonaliserbar matrise M.

Algoritme

1. La $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ være egenverdier for M.
   Anta at vi ønsker å estimere λ_1, og at vi har et startestimat s for λ_1 som ligger nærmere λ_1 enn de øvrige egenverdiene

$$\lambda_2, \ldots, \lambda_m$$

2. Bruk så potensmetoden til å estimere dominerende egenverdi for matrisen

$$A = (M - sI)^{-1} \qquad (I: \text{Identitetsmatrisen})$$

Matrisen A har nemlig (oppgave 12.13.2) de samme egenvektorene som M, og egenverdier

$$\phi_1 = \frac{1}{\lambda_1 - s}, \quad \phi_2 = \frac{1}{\lambda_2 - s}, \ldots, \phi_m = \frac{1}{\lambda_m - s}$$

Her vil egenverdien ϕ_1 være dominerende (dvs. ha størst absoluttverdi), fordi s er nærmere λ_1 enn de andre egenverdiene. La ϕ_1^{est} være estimatet for ϕ_1.

3. Finn λ_1^{est} ved

$$\lambda_1^{est} = s + \frac{1}{\phi_1^{est}}$$

Den estimerte egenvektoren for M blir den samme som for A.

Kommentarer / forklaring

- Hvis $\vec{v}$ er en egenvektor for M med egenverdi λ, så er

$$(M - sI)\vec{v} = M\vec{v} - s \cdot I\vec{v}$$
$$= \lambda\vec{v} - s\vec{v} = (\lambda - s)\vec{v}$$

Altså er $\vec{v}$ også en egenvektor for matrisen $M - sI$, med egenverdi $\lambda - s$.

- Dermed: Hvis startestimatet s ikke tilfeldigvis treffer en av egenverdiene til M eksakt, er ingen av egenverdiene til $M - sI$ lik 0. Da er den inverterbar, så $A = (M - sI)^{-1}$ eksisterer.

- Når vi bruker potensmetoden på $A = (M - sI)^{-1}$ i den inverse potensmetoden, kan det være numerisk mer effektivt å finne "mellomregningsvektoren"

$$\vec{x} = A\vec{y}_n = (M - sI)^{-1}\vec{y}_n$$

ved å løse

$$(M - sI)\vec{x} = \vec{y}_n$$

med hensyn på $\vec{x}$. (Slipper da å invertere $M - sI$.)