$\boxed{\text{Sekjon 12.3 forts}}$ (Lay 4.1-4.3)

Definisjon

Rangen rank T til en lineærtransformasjon er definert som dimensjonen til rekkevidden Ran T.

Teorem 5 (Rangteoremet)

La $T : V \to W$ være en lineærtransformasjon, der V og W er vektorrom, og V er endeligdimensjonalt. Da har vi

$$\dim(\text{Ker } T) + \underbrace{\dim(\text{Ran } T)}_{\text{rangen til } T} = \dim V$$

Bevis La $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ være en basis for Ker T.

Da er $\dim(\text{Ker } T) = k$.

Ved teorem 12.1.5 (Lay 4.5.12) kan samlingen $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ utvides til en basis

$$\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$$

for hele V. Vi skal vise at samlingen

$$B = \{T(\vec{v}_1), \dots, T(\vec{v}_m)\}$$

er lineært uavhengig og spenner ut Ran T, altså at B er en basis for Ran T. Da får vi at

$$\dim(\text{Ran } T) = m$$

Siden $k + m = \dim(V)$, gir dette

$$\dim(\text{Ker } T) + \dim(\text{Ran } T) = \dim(V).$$

[Viste her KOLA s. 590-591] □

eks. La $V = \mathbb{P}_4$ og $T : V \to V$ ved

$T(f) = f''$ (f dobbelderivert)

Da har vi $\dim(V) = 5$, og [Basis for V: $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$]

$$T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4)$$
$$= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4)''$$
$$= (a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3)'$$
$$= 2a_2 + 6a_3 x + 12 a_4 x^2 \qquad (*)$$

Her ser vi at

$$\vec{u}_1 = 1 \quad \text{og} \quad \vec{u}_2 = x$$

er en basis for Ker T. Altså $\dim(\text{Ker } T) = 2$.

Ved rangteoremet er

$$\dim(\text{Ran } T) = 5 - 2 = 3$$

Vi ser fra $(*)$ at

$$\{1, x, x^2\} = \{T(\tfrac{1}{2}x^2), T(\tfrac{1}{6}x^3), T(\tfrac{1}{12}x^4)\}$$

er en basis for Ran T. $\square$

La $T : V \to W$ være en lineærtransformasjon.

- Likningen $T(\vec{v}) = \vec{0}$ med ukjent $\vec{v}$ kalles den homogene likningen definert av T. Løsningsmengden til denne likningen er $\text{Ker}(T)$, og kalles løsningsrommet til likningen $T(\vec{v}) = \vec{0}$.
- Likningen $T(\vec{v}) = \vec{b}$, der $\vec{b} \neq \vec{0}$, kalles en inhomogen likning definert av T.

Teorem 6

La $T : V \to W$, la $\vec{b} \in W$, og la $\vec{a} \in V$ være en konkret vektor slik at

$$T(\vec{a}) = \vec{b}$$

Da er løsningsmengden til likningen $T(\vec{v}) = \vec{b}$ med ukjent $\vec{v}$ mengden

$$L = \{\vec{a} + \vec{u} \mid \vec{u} \in \operatorname{Ker} T\}$$

Bevis $T(\vec{v}) = \vec{b}$. Da er:

$$T(\vec{v} - \vec{a}) = T(\vec{v}) - T(\vec{a}) = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$$

Så $\vec{u} = \vec{v} - \vec{a} \in \operatorname{Ker} T$. Vi har $\vec{v} = \vec{a} + \vec{u}$, så $\vec{v}$ ligger i mengden L fra teoremet.

Omvendt, anta at $\vec{u} \in \operatorname{Ker} T$. Da er

$$T(\vec{a} + \vec{u}) = T(\vec{a}) + T(\vec{u}) = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b}$$

Så vektoren $\vec{a} + \vec{u}$ løser likningen $T(\vec{v}) = \vec{b}$. $\square$

Teorem 7

Hvis $T: V \to W$ er en lineærtransformasjon, så har vi

$$T \text{ er injektiv} \iff \operatorname{Ker}(T) = \{\vec{0}\}$$

Bevis $\Rightarrow$ Hvis T er injektiv, har likningen

$$T(\vec{v}) = \vec{b}$$

høyst én løsning for gitt $\vec{b} \in W$. Ved teorem 6 består da mengden

$$L = \{\vec{a} + \vec{u} \mid \vec{u} \in \operatorname{Ker} T\}$$

av høyst ett element. Da kan $\operatorname{Ker} T$ ha høyst ett element, og det må være nullvektoren $\vec{0}$.

$\Leftarrow$ Hvis $\operatorname{Ker} T = \{\vec{0}\}$, består mengden $\{\vec{a} + \vec{u} \mid \vec{u} \in \operatorname{Ker} T\}$ nøyaktig ett element for hver gitt $\vec{a} \in V$. Det følger fra teorem 6 at likningen

$$T(\vec{v}) = \vec{b}$$

har høyst en løsning. $\square$