12.4 Koordinatvektorer og matriserepresentasjoner (Lay 4.4, 4.5, 5.4)

La $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ være en basis for et vektorrom V.

Hvis $\vec{v} \in V$, kan vi skrive

$$\vec{v} = v_1 \vec{b}_1 + \dots + v_n \vec{b}_n \qquad (\text{skalarene } v_j \text{ unike})$$

Med koordinatvektoren $[\vec{v}]_B$ til $\vec{v}$ i basisen B menes vektoren

$$[\vec{v}]_B = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n .$$

Merk at

$$[\vec{0}]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (\text{nullvektoren i } \mathbb{R}^n)$$

eks $V = \mathbb{P}_2$ har basisen $B = \{1, x, x^2\}$

$p = 5 - x + 3x^2 \in V$ har da koordinatvektoren

$$[p]_B = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad (\text{fordi } p = 5 \cdot 1 + (-1) \cdot x + 3 \cdot x^2)$$

Hvis vi lar $p_0(x)$ være nullpolynomet gitt ved $p_0(x) = 0$, får vi

$$[p_0]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \square$$

Definisjon

En lineærtransformasjon $T : V \to W$ kalles en isomorfi hvis den er injektiv og surjektiv på W. Hvis det finnes en isomorfi mellom to vektorrom V og W, sier vi at de to vektorrommene er isomorfe.

Teorem 1: Koordinatavbildningen er en isomorfi

La V være et n-dimensjonalt vektorrom, og la $B = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ være en basis for V. Vi definerer koordinatavbildningen

$$T : V \to \mathbb{R}^n$$

med hensyn på basisen B ved

$$T(\vec{v}) = [\vec{v}]_B \qquad \text{for alle } \vec{v} \in V.$$

Da er T en isomorfi. Altså er V isomorft med $\mathbb{R}^n$.

Bevis Viste KOLA s. 595.

Matriserepresentasjoner av lineærtransformasjoner

La $T : V \to V'$ være en lineærtransformasjon mellom to vektorrom av dimensjoner n og m, og la

$$B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\} \quad \text{og} \quad B' = \{\vec{b}_1', \dots, \vec{b}_m'\}$$

være basiser for hhv. V og V'. Siden B' er en basis for V', kan vi skrive

$$\left\{\begin{array}{l} T(\vec{b}_1) = a_{11}\vec{b}_1' + \dots + a_{m1}\vec{b}_m' \\ \quad\vdots \\ T(\vec{b}_n) = a_{1n}\vec{b}_1' + \dots + a_{mn}\vec{b}_m' \end{array}\right. \qquad (*)$$

Matrisen $[T]_{B' \leftarrow B}$ til T i basisene B og B' er da definert ved

$$[T]_{B' \leftarrow B} \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

(Merk transponering fra $(*)$)

Hvis $V = V'$ og $B = B'$, setter

$$\underbrace{[T]_B}_{\text{Se Lay s. 322}} \overset{\text{def}}{=} [T]_{B \leftarrow B}$$

Teorem 2

La $T: V \to V'$, og la B og B' være basiser i hhv. V og V'. Da har vi

$$[T(\vec{v})]_{B'} = [T]_{B' \leftarrow B} \cdot [\vec{v}]_B$$

Bevis KOLA s. 597.

Figur: ("Kommutativt diagram")

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\vec{v} \mapsto [\vec{v}]_B"'] \arrow[dr, phantom, "\circ"] & V' \arrow[d, "\vec{w} \mapsto [\vec{w}]_{B'}"] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "{[T]_{B' \leftarrow B}}"', "\text{(gange med den)}"'] & \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

Her inne

Merk: Nullrommet til matrisen $[T]_{B' \leftarrow B}$ består av koordinatvektorene til vektorene i $\operatorname{Ker} T$

Her inne

Merk: Søylerommet til matrisen $[T]_{B' \leftarrow B}$ består av koordinatvektorene til vektorene i $\operatorname{Ran} T$

Spesialtilfelle: Hvis $V = \mathbb{R}^n$, $V' = \mathbb{R}^m$ og

$$T(\vec{v}) = A \cdot \vec{v}$$

der A er en $(m \times n)$-matrise, så er $A = [T]_{B' \leftarrow B}$ der B og B' er standardbasisene i $\mathbb{R}^n$ og $\mathbb{R}^m$.

eks. $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ ved $T(p) = p'$

La $V = V' = \mathbb{P}_2$

$\vec{b}_1 = 1 \ , \ \vec{b}_2 = x \ , \ \vec{b}_3 = x^2$

$B = B' = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$

Får:

$$\begin{cases} T(\vec{b}_1) = (1)' = 0 = 0\,\vec{b}_1 + 0\,\vec{b}_2 + 0\,\vec{b}_3 \\ T(\vec{b}_2) = (x)' = 1 = 1\,\vec{b}_1 + 0\,\vec{b}_2 + 0\,\vec{b}_3 \\ T(\vec{b}_3) = (x^2)' = 2x = 0\,\vec{b}_1 + 2\,\vec{b}_2 + 0\,\vec{b}_3 \end{cases}$$

Så (merk transponering)

$$[T]_B = [T]_{B \leftarrow B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Test: $\vec{v} = 13 + 17x + 5x^2$ gir

$$[\vec{v}]_B = \begin{bmatrix} 13 \\ 17 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$[T(\vec{v})]_B = [T]_B \cdot [\vec{v}]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 13 \\ 17 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

På den annen side:

$$T(\vec{v}) = (13 + 17x + 5x^2)' = 17 + 10x$$
$$= 17\,\vec{b}_1 + 10\,\vec{b}_2 + 0\,\vec{b}_3$$

Så $[T(\vec{v})]_B = \begin{bmatrix} 17 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$. Stemmer! $\square$