$\boxed{\text{Hvordan finne matriserepresentasjoner}}$

La $T : V \to V'$ være en lineærtransformasjon,
la $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ være en basis for V,
og la $B' = \{\vec{b}'_1, \dots, \vec{b}'_m\}$ — " — V'.

Da kan du finne matrisen

$$[T]_{B' \leftarrow B}$$

som representerer T i basisene B og B' slik:

1. Uttrykk $T(\vec{b}_1), \dots, T(\vec{b}_n)$ ved $\vec{b}'_1, \dots, \vec{b}'_m$,
dvs. finn skalarer a_{ij} slik at

$$\begin{cases} T(\vec{b}_1) = a_{11}\vec{b}'_1 + \dots + a_{m1}\vec{b}'_m \\ \quad\vdots \\ T(\vec{b}_n) = a_{1n}\vec{b}'_1 + \dots + a_{mn}\vec{b}'_m \end{cases}$$

2. Du har nå

$$[T(\vec{b}_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \dots, [T(\vec{b}_n)]_{B'} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

og

$$[T]_{B' \leftarrow B} = \Big[\underbrace{[T(\vec{b}_1)]_{B'} \; \cdots \; [T(\vec{b}_n)]_{B'}}_{\text{søylevektorer}} \Big]$$

Matrisen til en sammensatt transformasjon

Anta at $T_1 : V \to V'$ og $T_2 : V' \to V''$

Da er den sammensatte transformasjonen

$$(T_2 \circ T_1) : V \to V''$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T_1"] \arrow[rr, bend right, "T_2 \circ T_1"'] & V' \arrow[r, "T_2"] & V'' \end{tikzcd}$$

definert ved $(T_2 \circ T_1)(\vec{v}) = T_2(T_1(\vec{v}))$ for alle $\vec{v} \in V$.

Teorem 4

I situasjonen ovenfor, anta at B, B' og B'' er basiser for hhv. V, V' og V''. Da er

$$[T_2 \circ T_1]_{B'' \leftarrow B} = \underbrace{[T_2]_{B'' \leftarrow B'} \cdot [T_1]_{B' \leftarrow B}}_{\text{matriseprodukt}}$$

Bevis Viste KOLA s. 599

eks. $T_1 : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ gitt ved $T_1(p) = p'$
$B = \{1, x, x^2\}$ for $\mathbb{P}_2$

forrige eksempel

$$[T_1]_{B \leftarrow B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$T_2 : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ gitt ved $T_2(p) = 7p$

$$[T_2]_{B \leftarrow B} = [T_2]_B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Teorem 4 med $V = V' = V''$ og $B = B' = B''$ gir

$$[T_2 \circ T_1]_{B \leftarrow B} = [T_2]_{B \leftarrow B} \cdot [T_1]_{B \leftarrow B}$$

dvs.

$$[T_2 \circ T_1]_B = [T_2]_B \cdot [T_1]_B$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Test av regningen i eksemplet

$\vec{v} = p = 3 + 5x + 9x^2$ gir

$$[(T_2 \circ T_1)(\vec{v})]_B = [T_2 \circ T_1]_B \cdot [\vec{v}]_B$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 126 \\ 0 \end{bmatrix}$$

På den annen side:

$$(T_2 \circ T_1)(\vec{v}) = T_2(T_1(\vec{v}))$$

$$= T_2((3 + 5x + 9x^2)')$$

$$= T_2(5 + 18x)$$

$$= 7 \cdot (5 + 18x) = 35 + 126x$$

$$= 35 \cdot 1 + 126 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

Så $[(T_2 \circ T_1)(\vec{v})]_B = \begin{bmatrix} 35 \\ 126 \\ 0 \end{bmatrix}$ ← Det stemte

Teorem 5

Anta $T : V \to V'$, og la B og B' være basiser i V og V'.

Hvis T^{-1} fins, så er

$$[T^{-1}]_{B \leftarrow B'} = \underbrace{\left([T]_{B' \leftarrow B}\right)^{-1}}_{\text{den inverse av matrisen } [T]_{B' \leftarrow B}}$$

$$V \underset{T^{-1}}{\overset{T}{\rightleftarrows}} V'$$

Bevis Viste KOLA s. 600