

Hvordan finne matriserepresentasjoner

La $T: V \rightarrow V'$ være en lineærtransformasjon,
 la $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ være en basis for V ,
 og la $B' = \{\vec{b}'_1, \dots, \vec{b}'_m\}$ — " — V' .

Da kan du finne matrisen

$$[T]_{B' \leftarrow B}$$

som representerer T i basisene B og B' slik:

- ① Uttrykk $T(\vec{b}_1), \dots, T(\vec{b}_n)$ ved $\vec{b}'_1, \dots, \vec{b}'_m$,
 dvs. finn skalarer a_{ij} slik at

$$\begin{cases} T(\vec{b}_1) = a_{11}\vec{b}'_1 + \dots + a_{m1}\vec{b}'_m \\ \vdots \\ T(\vec{b}_n) = a_{1n}\vec{b}'_1 + \dots + a_{mn}\vec{b}'_m \end{cases}$$

- ② Du har nå

$$[T(\vec{b}_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \dots, [T(\vec{b}_n)]_{B'} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

og

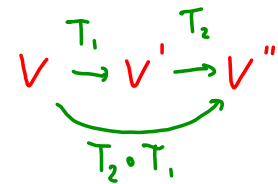
$$[T]_{B' \leftarrow B} = \underbrace{\begin{bmatrix} [T(\vec{b}_1)]_{B'} & \dots & [T(\vec{b}_n)]_{B'} \end{bmatrix}}_{\text{søylevektorer}}$$

Matrisen til en sammensatt transformasjon

Anta at $T_1: V \rightarrow V'$ og $T_2: V' \rightarrow V''$

Da er den sammensatte transformasjonen

$$(T_2 \circ T_1): V \rightarrow V''$$



definert ved $(T_2 \circ T_1)(\vec{v}) = T_2(T_1(\vec{v}))$ for alle $\vec{v} \in V$.

Teorem 4

I situasjonen ovenfor, anta at B, B' og B'' er basiser for hhv. V, V' og V'' . Da er

$$[T_2 \circ T_1]_{B'' \leftarrow B} = \underbrace{[T_2]_{B'' \leftarrow B'} \cdot [T_1]_{B' \leftarrow B}}_{\text{matriseprodukt}}$$

Bevis Viste KOLA s. 599

eks. $T_1: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ gitt ved $T_1(p) = p'$ } $[T_1]_{B \leftarrow B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$B = \{1, x, x^2\}$ for \mathbb{P}_2

forrige eksempel

$T_2: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ gitt ved $T_2(p) = 7p$

$$[T_2]_{B \leftarrow B} = [T_2]_B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Teorem 4 med $V = V' = V''$ og $B = B' = B''$ gir

$$[T_2 \circ T_1]_{B \leftarrow B} = [T_2]_{B \leftarrow B} \cdot [T_1]_{B \leftarrow B}$$

dvs. $[T_2 \circ T_1]_B = [T_2]_B \cdot [T_1]_B$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}}$$

Test av regningen i eksemplet

$$\vec{v} = p = 3 + 5x + 9x^2 \quad \text{gir}$$

$$\begin{aligned} [(T_2 \circ T_1)(\vec{v})]_{\mathcal{B}} &= [T_2 \circ T_1]_{\mathcal{B}} \cdot [\vec{v}]_{\mathcal{B}} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 126 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

På den annen side:

$$\begin{aligned} (T_2 \circ T_1)(\vec{v}) &= T_2(T_1(\vec{v})) \\ &= T_2((3 + 5x + 9x^2)') \\ &= T_2(5 + 18x) \\ &= 7 \cdot (5 + 18x) = 35 + 126x \\ &= 35 \cdot 1 + 126 \cdot x + 0 \cdot x^2 \end{aligned}$$

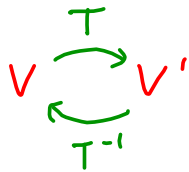
$$\text{Så } [(T_2 \circ T_1)(\vec{v})]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 35 \\ 126 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{Det stemte}$$

Teorem 5

Anta $T: V \rightarrow V'$, og la B og B' være basiser i V og V' .

Hvis T^{-1} fins, så er

$$[T^{-1}]_{B \leftarrow B'} = \left([T]_{B' \leftarrow B} \right)^{-1}$$



den inverse av matrisen $[T]_{B' \leftarrow B}$

Bevis Viste KOLA s. 600

