13.9 Anvendelse: Kvadratiske former (Lay 7.2, 7.3)

Hvordan klassifisere roterte kjeglesnitt

1. Gitt likningen

$$Ax_1^2 + Bx_1x_2 + Cx_2^2 + Dx_1 + Ex_2 + F = 0 \qquad (*)$$

La Q være den kvadratiske formen

$$Q = Ax_1^2 + Bx_1x_2 + Cx_2^2$$

Skriv

$$Q = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot M \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \text{der } M = \begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix}$$

2. Finn egenverdiene λ_1 og λ_2 for M (kan ha $\lambda_1 = \lambda_2$), og finn en tilhørende ortonormal egenbasis

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} q \\ s \end{bmatrix} \quad \text{for } M$$

La

$$P = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$

3. Innfør nye koordinater $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ gitt ved $\vec{x} = P\vec{y}$

Dvs.

$$\begin{cases} x_1 = py_1 + qy_2 \\ x_2 = ry_1 + sy_2 \end{cases}$$

4. Uttrykk likningen (*) ved y_1 og y_2.
Du får da en likning på formen (prinsipalakseteoremet)

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + Dy_1 + Ey_2 + F = 0$$

5. Klassifiser denne likningen på "vanlig" måte, dvs. eventuelt med utvidelse til fullstendig kvadrat (KOLA seksjon 8.7). □

eks. Klassifiser og skisser kjeglesnittet

$$5x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 - 21 = 0$$

Løsn. 1 $Q = 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

2 Egenverdier for M

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-5)^2 - 4 = \lambda^2 - 10\lambda + 21 = 0$$

$$\text{gir } \lambda = \frac{10 \pm \sqrt{100-84}}{2} = \frac{10 \pm 4}{2} = \begin{cases} 7 \\ 3 \end{cases}$$

Egenvektorer til $\lambda_1 = 7$

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 7 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \text{gir} \quad \begin{cases} 5a - 2b = 7a & \text{I} \\ -2a + 5b = 7b & \text{II} \end{cases}$$

Begge sier $b = -a$. Tar $\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Egenvektorer til $\lambda_2 = 3$

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \text{gir} \quad \begin{cases} 5a - 2b = 3a & \text{I} \\ -2a + 5b = 3b & \text{II} \end{cases}$$

Begge sier $a = b$. Tar $\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

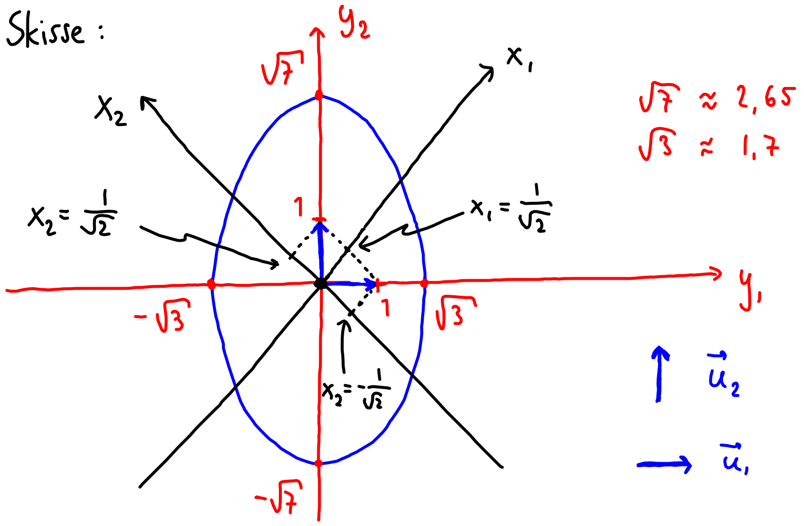
$$\text{Så } P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

3. $\vec{x} = P\vec{y}$, dvs.
$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 \\ x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 \end{cases}$$

4. Vi får
$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = 7y_1^2 + 3y_2^2 = 21$$

5. Skriver om:
$$\frac{y_1^2}{3} + \frac{y_2^2}{7} = \frac{21}{21}$$
$$\frac{y_1^2}{(\sqrt{3})^2} + \frac{y_2^2}{(\sqrt{7})^2} = 1 \qquad \underline{\underline{\text{Ellipse}}}$$

Skisse:



Sjekking / forklaring:

$\vec{x} = P\vec{y}$, og vi har $P \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

Så hvis $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, har vi

$\boxed{P \text{ ortogonal}}$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = P^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

P er overgangsmatrisen fra B til standardbasis S, dvs.
$$P = [id]_{S \leftarrow B}$$
$$P^{-1} = [id]_{B \leftarrow S}$$

Sjekk av prinsipalaksteoremet (unødvendig):

$$Q = 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2$$

$$= 5\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2\right)^2$$

$$- 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2\right)$$

$$+ 5\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2\right)^2$$

$$= \frac{5}{2}\left(\underline{y_1^2} + \cancel{2y_1y_2} + y_2^2\right) - 2\left(y_2^2 - \underline{y_1^2}\right)$$

$$+ \frac{5}{2}\left(y_2^2 - \cancel{2y_1y_2} + \underline{y_1^2}\right)$$

$$= 7y_1^2 + 3y_2^2 \quad \text{(som vi visste fra før)}. \quad \square$$

Teorem 1 (Prinsipalakseteoremet)

La Q være den kvadratiske formen

$$Q(\vec{x}) = \vec{x}^T M \vec{x}$$

der M er en symmetrisk $(n \times n)$-matrise. La $B = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ være en ortonormal egenbasis for M med tilhørende egenverdier $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. La

$$[\vec{x}]_B \overset{\text{dåp}}{=} \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{for gitt } \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

Da har vi

$$Q(x) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

Bevis

$$Q(\vec{x}) = \vec{x}^T M \vec{x} = \vec{x}^T (PDP^T) \vec{x}$$

$P = [\vec{u}_1 \cdots \vec{u}_n]$

Husk at

$P^T = P^{-1}$

(P ortogonal matrise)

$\boxed{\vec{x} = P\vec{y}}$

$$= (P\vec{y})^T (PDP^T)(P\vec{y})$$

$$= y^T (P^T P) D (P^T P) \vec{y}$$

$$= y^T D y$$

$$= [y_1 \cdots y_n] \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \qquad \square$$

Korollar (Står ikke eksplisitt i KOLA, men er i Lay)

Hvis $\vec{x}$ er en egenvektor for M med den største [minste] egenverdien λ_1 for M, så er

$$Q(\vec{x})$$

den største [minste] verdien Q oppnår blant vektorer $\vec{x}$ slik at $\|\vec{x}\| = 1$, dvs. blant vektorer med lengde 1.

Bevis Hvis $\|\vec{x}\| = 1$, vil også

$$\|\vec{y}\| = \|P\vec{x}\| = 1 \quad (\text{fordi } P \text{ er ortogonal})$$

Altså

$$Q(\vec{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

$$\leq \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_1 y_n^2$$

$\geq$ hvis λ_1 er den minste

$$= \lambda_1 (y_1^2 + \dots + y_n^2) = \lambda_1 \cdot \|\vec{y}\|^2 = \lambda_1$$

Hvis $\vec{x}$ er en egenvektor med egenverdi λ_1, har vi

$$[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Så da er

$$Q(\vec{x}) = \lambda_1 y_1^2 + 0 + \dots + 0 = \lambda_1 \cdot 1^2 = \lambda_1 \quad \square$$

eks. (Eksamen H22 oppgave 3)

La $Q = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2$ på $\mathbb{R}^3$.

a) Finn maksimum $M = \max\limits_{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\vec{x}\| = 1} Q(\vec{x})$

og en vektor $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ slik at $\|\vec{x}_0\| = 1$ og $Q(\vec{x}_0) = M$.

Løsn. Vi har

$$Q = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{M} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Egenverdier for M

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} + 0$$

$$= (4-\lambda)^2(5-\lambda) - 4(5-\lambda)$$

$$= (5-\lambda)\left[(4-\lambda)^2 - 4\right] = 0$$

Altså $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 2$

Egenvektorer til $\lambda_1 = 6$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad \text{gir} \quad \begin{cases} 4a + 2b = 6a & \text{I} \\ 2a + 4b = 6b & \text{II} \\ 5c = 6c & \text{III} \end{cases}$$

III sier $c = 0$

I og II sier $a = b$

Egenvektor med lengde 1: $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Vi kan da ta $\vec{x}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, og vi har $M = 6$ (korollaret)

b) La $V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$

Finn maksimum av Q på $A = \{\vec{v} \in V : \|\vec{v}\| = 1\}$

satte navn

Løsn. Vi har

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1 + x_2$$

Så A består av de $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ som har lengde 1 og står ortogonalt på $\vec{x}_0$.

Det betyr at maksimum av Q på A blir nest største egenverdi for M, altså $\underline{\underline{5}}$

Forklaring til oppgaven

Vi har

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \square & \square \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \square & \square \\ 0 & \square & \square \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

egenvektor til $\lambda_2 = 5$

egenvektor til $\lambda_3 = 2$

$$Q = 6y_1^2 + 5y_2^2 + 2y_3^2$$

Så

$$\frac{Q}{6 \cdot 5 \cdot 2} = \frac{y_1^2}{5 \cdot 2} + \frac{y_2^2}{6 \cdot 2} + \frac{y_3^2}{6 \cdot 5}$$

$$= \left(\frac{y_1}{\sqrt{10}}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{\sqrt{12}}\right)^2 + \left(\frac{y_3}{\sqrt{30}}\right)^2$$

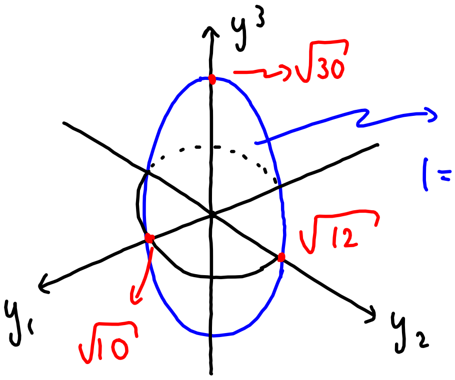
- Hvis $\|\vec{x}\| = 1$, er $\|\vec{y}\| = 1$, så $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$.

  Da blir Q størst med $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, dvs. $\vec{x} = \vec{x}_0$

- Men hvis $\vec{x}$ skal stå normalt på $\vec{x}_0$, må også $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ stå normalt på $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, fordi P er en ortogonal matrise.

  Da er en egenvektor for $\lambda_2 = 5$ best, dvs. $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

  Dermed blir $Q = 6 \cdot 0^2 + 5 \cdot 1^2 + 2 \cdot 0^2 = \underline{\underline{5}}$



Flaten gitt ved

$$1 = \left(\frac{y_1}{\sqrt{10}}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{\sqrt{12}}\right)^2 + \left(\frac{y_3}{\sqrt{30}}\right)^2$$

Definithetsbegrepene

- En kvadratisk form Q på $\mathbb{R}^n$ kalles

  positiv definit hvis $Q(\vec{x}) > 0$ for alle $\vec{x} \neq \vec{0}$
  negativ — " — $Q(\vec{x}) < 0$ — " —
  indefinit hvis $Q(x)$ har både positive og negative verdier
  positiv semidefinit hvis $Q(x) \geq 0$ for alle $\vec{x}$
  negativ — " — $Q(x) \leq 0$ — " —

- En kvadratisk matrise M kalles

  positiv definit hvis alle egenverdiene til M er positive
  negativ — " — " — " — " — negative
  indefinit hvis M har både positive og negative egenverdier
  positiv semidefinit hvis alle egenverdiene er ≥ 0
  negativ — " — " — " — ≤ 0

Teorem 2

La Q være en kvadratisk form på $\mathbb{R}^n$ slik at

$$Q(\vec{x}) = \vec{x}^T M \vec{x} \quad \text{for alle } \vec{x} \in \mathbb{R}^n,$$

der M er en symmetrisk $(n \times n)$-matrise.
Da er definithetsegenskapene til M og Q tilsvarende hverandre.

Bevis Siden M er symmetrisk, har den en ortonormal egenbasis

$$\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$$

Prinsipalakseteoremet gir

$$Q(\vec{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \qquad (*)$$

der $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ er egenverdiene til M og

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = P\vec{y} = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \cdots & \vec{b}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Vi har $\vec{x} = \vec{0} \iff y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0$

Teoremet følger fra dette, fordi fortegnet til Q i $(*)$ bestemmes av egenverdiene $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. $\square$